INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL MONSEÑOR AGUSTÍN GUTIÉRREZ

GUÍA DE TRABAJO

ASIGNATURA	Matemáticas	**CURSO**	Décimo
DOCENTE	Diego Felipe Rodríguez	**PERIODO**	Cuarto
FECHA DE INICIO	18 septiembre 2023	**FECHA DE TERMINACIÓN**	18 noviembre 2023
COMPETENCIA	**Competencia General:** Determinar el valor de las funciones trigonométricas y las aplica para hallar medidas desconocidas en triángulos.		
	Competencia Específica: Resolver problemas relacionados con los triángulos.		
DESEMPEÑOS	**PARA APRENDER**	Construye el triángulo rectángulo que satisface una condición dada.	
	PARA HACER	Halla el valor de todas las funciones trigonométricas de un ángulo, a partir de una de ellas.	
	PARA SER	Realiza las actividades propuestas de la guía, como una forma de demostrar su responsabilidad y compromiso.	
	PARA CONVIVIR	Reconoce la importancia de la aplicación de conceptos matemáticos al mejoramiento de su entorno.	
DBA	Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.		
ESTANDAR	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias		

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Las identidades trigonométricas tienen un uso especial en el cálculo para trabajar en las derivadas e integrales, las cuales se utilizan en ramas de la física como la óptica y la mecánica.

Una identidad trigonométrica es una identidad en la que se establecen relaciones usando funciones trigonométricas.

Identidades Fundamentales

Las identidades fundamentales son aquellas que se deducen directamente de las definiciones y estas son la base para demostrar otras identidades y resolver ecuaciones que involucran funciones trigonométricas. Estas son las relaciones reciprocas, las relaciones que son razón entre dos funciones y las relaciones pitagóricas.

Identidades Reciprocas

Se deducen a partir de las definiciones de las definiciones de las funciones seno, coseno, y tangente y se conocen con el nombre de cosecante, secante y cotangente.

Por definición obtenemos que:

- $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ y $\csc\theta = \frac{r}{y}$, con $y \neq 0$. Luego, sen θ es el inverso de csc θ, así:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\csc\theta} \text{ si } \operatorname{sen}\theta \neq 0 \text{ y } \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}, \text{ luego } \operatorname{sen}\theta\csc\theta = 1$$

- $\cos\theta = \frac{x}{r}$ y $\sec\theta = \frac{r}{x}$ con $x \neq 0$. Luego, cos θ es el inverso de sec θ, así:

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \text{ si } \sec\theta \neq 0 \text{ y } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ si } \cos\theta \neq 0, \text{ luego } \cos\theta\sec\theta = 1$$

- $\tan\theta = \frac{y}{x}$, con $x \neq 0$ y $\cot\theta = \frac{x}{y}$, con $y \neq 0$. Así, cot θ es el inverso de tan θ, así:

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \text{ si } \cot\theta \neq 0 \text{ y } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \text{ si } \tan\theta \neq 0, \text{ luego } \tan\theta\cot\theta = 1$$

Identidades que son razón entre dos funciones

Con la base en la definición de un ángulo en posición normal, se tiene que:

$$\text{si } \cos\theta \neq 0, \text{ entonces, } \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \text{ y si } \operatorname{sen}\theta \neq 0 \text{ entonces } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.$$

EJEMPLOS

1. Determinar el valor de la función trigonométrica del ángulo β en cada caso:

a. $\operatorname{sen}\beta$ si $\csc\beta = \frac{15}{4}$

Como $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\csc\beta}$ se tiene $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\frac{15}{4}} = \frac{4}{15}$

b. $\tan\beta$ si $\cot\beta = -6$

Como $\tan\beta = \frac{1}{\cot\beta}$ se tiene $\tan\beta = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$

c. $\sec\beta$ si $\cos\beta = -\frac{\sqrt{11}}{5}$

Como $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta}$ se tiene $\sec\beta = \frac{1}{\frac{\sqrt{11}}{-5}} = \frac{-5}{\sqrt{11}}$

Al racionalizar se tiene que:

$$\sec\beta = \frac{-5}{\sqrt{11}} = \frac{-5\sqrt{11}}{11}$$

d. $\cot\beta$ si $\tan\beta = \sqrt{2}$.

Como $\cot\beta = \frac{1}{\tan\beta}$ se tiene $\cot\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Al racionalizar se tiene que: $\cot\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Calcular el valor de todas las funciones trigonométricas para un ángulo ϕ, si se sabe que $\operatorname{sen}\phi = -\frac{4}{5}$ y $\cos\phi = \frac{3}{5}$. Indicar el cuadrante en el que se encuentra el ángulo.

Como $\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}$ entonces $\tan\phi = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

Como $\cot\phi = \frac{1}{\tan\phi}$ entonces $\cot\phi = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$

Como $\sec\phi = \frac{1}{\cos\phi}$ entonces $\sec\phi = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

Como $\csc\phi = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}$ entonces $\csc\phi = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

El ángulo ϕ está en el cuarto cuadrante por tener el seno negativo y el coseno positivo.

3. Verificar que $\tan\theta\cot\theta = 1$ para $\tan\theta = 60°$.

Se remplazan los valores y se realizan las operaciones.

$$\tan 60° \cot 60° = (\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{3}{3} = 1$$

Identidades Pitagóricas

Las identidades pitagóricas se deducen a partir de la aplicación del teorema de pitagoras, en el triángulo rectángulo generado por un ángulo en posición normal, que se ubica en la circunferencia unitaria.

Las tres **identidades pitagóricas básicas** son:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \qquad \cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$$

EJEMPLO

Deducir la identidad $\cot^2\sigma + 1 = \csc^2\sigma$ a partir de la identidad $\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma = 1$

$\operatorname{sen}^2\sigma + \cos^2\sigma = 1$	Identidad pitagórica dada.
$\operatorname{sen}^2\sigma\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} + \cos^2\sigma\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}$	Se multiplica por $\frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}$ en ambos lados.
$\frac{\operatorname{sen}^2\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma} + \frac{\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}^2\sigma} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\sigma}$	Se realizan operaciones.
$1 + \cot^2\sigma = \csc^2\sigma$	Se aplican las relaciones recíprocas entre dos funciones y se simplifica.
$\cot^2\sigma + 1 = \csc^2\sigma$	Se aplica la propiedad conmutativa de la adición.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Propongo • Ejercito • Soluciono problemas

Representa la información mediante un triángulo y calcula las restantes razones trigonométricas del ángulo β, teniendo en cuenta la información dada en cada caso.

1. $\operatorname{sen} \beta = \frac{3}{5}$, y, β está en el segundo cuadrante.
2. $\tan \beta = 2$, y, $180° < \beta < 270°$.

Determina el valor de la función trigonométrica que se indica en cada caso, utilizando la relación dada y las funciones recíprocas.

3. Si $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$; $\csc x$
4. Si $\csc x = \frac{6}{5}$; $\operatorname{sen} x$
5. Si $\sec x = \frac{5}{4}$; $\cos x$
6. Si $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\tan x$
7. Si $\cos x = \frac{8}{17}$; $\sec x$
8. Si $\tan x = \frac{5}{4}$; $\cot x$
9. Si $\operatorname{sen} x = 0{,}5$; $\csc x$
10. Si $\cos x = -\frac{3}{4}$; $\sec x$

Escribe cada expresión en términos de seno o coseno según se solicita.

11. $\tan \delta \csc \delta$ en términos de $\cos \delta$.
12. $\operatorname{sen} x + \csc x$ en términos de $\operatorname{sen} x$.
13. $\frac{\cos x \sec x}{\csc x} + 2 \operatorname{sen} x$ en términos de $\operatorname{sen} x$.
14. $\sec x \cos x \csc x$ en términos de $\operatorname{sen} x$.
15. $\frac{\tan x \cot x}{\sec x} + 2 \cos x$ en términos de $\cos x$.
16. $(\operatorname{sen} A \cot A)^2$ en términos de $\cos A$.
17. $\tan^2 x + \cot^2 x$ en términos de $\operatorname{sen} x$.

Determina el valor que se indica utilizando la relación dada y las identidades pitagóricas sabiendo que x está en el primer cuadrante.

18. $\cos x = \frac{8}{17}$; $\operatorname{sen} x$
19. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$; $\cos x$
20. $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$; $\tan x$
21. $\cos x = \frac{2}{5}$; $\csc x$
22. $\cos x = \frac{2}{\sqrt{8}}$; $\operatorname{sen} x$
23. $\cos x = \frac{12}{13}$; $\cot x$
24. $\tan x = \frac{3}{5}$; $\sec x$
25. $\sec x = 3$; $\cot x$

Lee la siguiente información. Luego, resuelve.

Las ecuaciones para la velocidad horizontal y vertical de un proyectil que se lanza con un ángulo de inclinación θ_0 son:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 \text{ y } v_y = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt$$

donde, g representa la gravedad, t el tiempo de vuelo y v_0 la velocidad inicial.

Si se sabe que la velocidad inicial es de 5,6 m/s y que $\cos \theta = \frac{2}{5}$:

26. Calcula la velocidad horizontal v_x
27. Calcula la velocidad vertical v_y para un tiempo de 5 s.

La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene cuando la velocidad vertical equivale a cero $v_y = 0$, por lo cual se calcula mediante la siguiente expresión:

$$y_{máx} = \frac{v_0^2 (1 - \cos^2 \theta)}{2g}$$

28. Expresa la fórmula en términos de $\operatorname{sen} \theta$.
29. Calcula la altura máxima que alcanza el proyectil si se sabe que la velocidad con que es lanzado es de 4,65 m/s y que $\tan \theta = \frac{12}{13}$.
30. Encuentra, si es posible, el valor del ángulo para que la altura máxima del proyectil se duplique manteniendo la velocidad inicial.

Lo que viene...

A continuación aprenderás cómo se realiza la demostración de una identidad trigonométrica a partir de las identidades fundamentales, explica cómo puedes escribir la expresión $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1$ en términos de la función seno.

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Uno de los usos principales que tienen las identidades trigonométricas es el de simplificar expresiones que involucran funciones trigonométricas para así encontrar expresiones equivalentes más sencillas o útiles según la situación que se esté desarrollando.

EJEMPLOS

1. Escribir la expresión trigonométrica $\frac{\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\cot\alpha}$ en términos de $\cos\alpha$.

$\frac{\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\cot\alpha}$	Expresión trigonométrica dada.
$= \frac{\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$	Se remplaza $\csc\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ y $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.
$= \frac{\frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}$	Se realizan operaciones.
$= \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}$	Se simplifica la expresión.
$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$	Se remplaza $\cos^2\alpha$ usando la identidad $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$.
$= \cos\alpha$	Se simplifica la expresión.

Por tanto, la expresión trigonométrica $\frac{\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\cot\alpha}$ en términos de $\cos\alpha$ equivale a $\cos\alpha$. Esto es: $\frac{\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha}{\cot\alpha} = \cos\alpha$

2. Expresar $\tan^2\alpha - \cot^2\alpha$ en términos de $\operatorname{sen}\alpha$.

$\tan^2\alpha - \cot^2\alpha$	Expresión trigonométrica dada.
$= \sec^2\alpha - 1 - (\csc^2\alpha - 1)$	Se remplazan $\tan^2\alpha$ y $\cot^2\alpha$ mediante las identidades pitagóricas.
$= \sec^2\alpha - \csc^2\alpha$	Se realizan operaciones.
$= \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$	Se utilizan las identidades recíprocas para remplazar $\sec^2\alpha$ y $\csc^2\alpha$.
$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}$	Se realiza la resta de fracciones con funciones trigonométricas.
$= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha - (1 - \operatorname{sen}^2\alpha)}{(1 - \operatorname{sen}^2\alpha)\cdot \operatorname{sen}^2\alpha}$	Se remplaza $\cos^2\alpha$ por $1 - \operatorname{sen}^2\alpha$.
$= \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}$	Se realizan operaciones y se simplifica.

Luego, $\tan^2\alpha - \cot^2\alpha = \frac{2\operatorname{sen}^2\alpha - 1}{\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^4\alpha}$

También, para la simplificación de expresiones trigonométricas se deben tener en cuenta los casos de los productos notables vistos en algebra.

Productos notables	
Binomio al cuadrado	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Binomio al cubo	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Producto de suma y diferencia	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Así mismo, se muestran los casos de factorización que más se usan.

Casos de factorización	
Factor común	$ax^2 + ax - ay = a(x^2 + x - y)$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Suma o diferencia de cubos	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\,(a^2 \mp ab + b^2)$

EJEMPLO

1. Simplificar cada expresión trigonométrica.

a. $(1 - \cos\beta)^2 + 2\cot\beta\,\mathrm{sen}\,\beta$

$(1 - \cos\beta)^2 + 2\cot\beta\,\mathrm{sen}\,\beta$ — Expresión trigonométrica dada.

$= 1 - 2\cos\beta + \cos^2\beta + 2\cot\beta\,\mathrm{sen}\,\beta$ — Se resuelve el producto notable.

$= 1 - 2\cos\beta + \cos^2\beta + 2\dfrac{\cos\beta\,\mathrm{sen}\,\beta}{\mathrm{sen}\,\beta}$ — Se remplaza $\cot\beta$ por $\dfrac{\cos\beta}{\mathrm{sen}\,\beta}$.

$= 1 - 2\cos\beta + \cos^2\beta + 2\cos\beta$ — Se simplifica la fracción.

$= 1 + \cos^2\beta$ — Se realizan operaciones.

Luego, $(1 - \cos\beta)^2 + 2\cot\beta\,\mathrm{sen}\,\beta = 1 + \cos^2\beta$.

b. $\dfrac{1}{1 - \cos A} + \dfrac{1}{1 + \cos A}$

$\dfrac{1}{1 - \cos A} + \dfrac{1}{1 + \cos A}$ — Expresión dada.

$= \dfrac{(1 + \cos A) + (1 - \cos A)}{(1 - \cos A)\cdot(1 + \cos A)}$ — Se realiza una suma de fracciones.

$$= \frac{2}{(1-\cos A)\cdot(1+\cos A)}$$ Se simplifica el numerador.

$$= \frac{2}{1-\cos^2 A}$$ Se resuelve el producto notable del denominador.

$$= \frac{2}{\operatorname{sen}^2 A} = 2\csc^2 A$$ Se remplaza por $1-\cos^2 A$ por $\operatorname{sen}^2 A$ y $\frac{1}{\operatorname{sen}^2 A}$ por $\csc^2 A$.

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{1}{1-\cos A} + \frac{1}{1+\cos A} = \frac{2}{\operatorname{sen}^2 A} = 2\csc^2 A$$

c. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

Primero, se factoriza la expresión $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$, ya que es una diferencia de cubos. Así,

$$= \frac{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$ Se factoriza $\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x$.

$$= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x$$ Se simplifica la expresión.

$$= 1 + \operatorname{sen} x \cos x$$ Se remplaza $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ por 1.

Luego, $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 1 + \operatorname{sen} x \cos x$.

2. Revisar el proceso desarrollado en la simplificación de la expresión trigonométrica $\csc\theta + \cos\theta\cot\theta$ y determinar dónde se encuentra el error cometido.

$\csc\theta + \cos\theta\cot\theta$ Expresión dada.

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \cos\theta \times \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$ Se remplazan $\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$ y $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$.

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$ Se multiplica.

$$= \operatorname{sen}\theta\,(1 + \cos^2\theta)$$ Se factoriza la expresión por factor común.

$$= \operatorname{sen}\theta\,(\operatorname{sen}^2\theta) = \operatorname{sen}^3\theta$$ Se remplaza $1 + \cos^2\theta$ por $\operatorname{sen}^2\theta$.

Luego, $\csc\theta + \cos\theta\cot\theta = \operatorname{sen}^3\theta$.

En la simplificación anterior se presentan dos errores.

El primer error se produjo al factorizar por factor común. En este caso la expresión resultante debía ser $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(1+\cos^2\theta)$ en lugar de $\operatorname{sen}\theta\,(1+\cos^2\theta)$.

El segundo error consiste en que $(1+\cos^2\theta)$ no equivale a $\operatorname{sen}^2\theta$.

El procedimiento completo y correcto es:

$$\csc\theta + \cos\theta\cot\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \cos\theta \times \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}(1+\cos^2\theta)$$

Luego, $\csc\theta + \cos\theta\cot\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}(1+\cos^2\theta)$

DEMOSTRACIÓN DE UNA IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Demostrar una identidad trigonométrica consiste en transformar los miembros de la igualdad para mostrar que estos son iguales.

Algunas sugerencias para la demostración de una identidad son:

- Empezar por el lado que tienen más términos en la igualdad y realizar las transformaciones que sean posibles hasta obtener la expresión del otro lado.
- Convertir, cuando sea posible, las expresiones en otras que solo contengan senos y cosenos.
- Realizar las operaciones algebraicas de adición, sustracción, multiplicación o factorización, entre otras, con el fin de simplificar las expresiones lo que más se pueda.
- En ocasiones puede ser más conveniente transformar cada lado de la identidad por separado, hasta llegar a la misma expresión.

EJEMPLOS

1. Demostrar las siguientes identidades. Para ello, desarrollar a partir del lado que tiene más términos.

a. $\sec\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot (\tan\theta + \cot\theta)$

$\sec\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot (\tan\theta + \cot\theta)$ Igualdad dada.

$= \operatorname{sen}\theta \cdot \left(\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)$ Se escriben las expresiones de la derecha en términos de seno y de coseno.

$= \operatorname{sen}\theta \cdot \left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta}\right)$ Se realiza la adición del paréntesis.

$= \cancel{\operatorname{sen}\theta} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta \cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta}}$ Se remplaza la identidad pitagórica.

$= \dfrac{1}{\cos\theta}$ Se simplifica la expresión.

$= \sec\theta$ Se remplaza por la identidad recíproca correspondiente.

Como la expresión del lado izquierdo de la igualdad es $\sec\theta$, que corresponde a la misma expresión de la derecha al ser simplificada, se verifica que

$$\sec\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot (\tan\theta + \cot\theta).$$

b. $\dfrac{\sec t}{\cos t} - \dfrac{\tan t}{\cot t} = 1$

$\dfrac{\sec t}{\cos t} - \dfrac{\tan t}{\cot t}$ Expresión del lado izquierdo.

$= (\sec t)(\sec t) - (\tan t)(\tan t)$ Se remplazan por las identidades recíprocas.

$= \sec^2 t - \tan^2 t = 1$ Se realizan operaciones y se remplaza por la identidad pitagórica.

Por tanto, se tiene que:

$$\frac{\sec t}{\cos t} - \frac{\tan t}{\cot t} = 1$$

c. $\dfrac{\cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cot\beta}{\cot\beta} = 2\operatorname{sen}\beta$

Para verificar esta identidad, se transformará la expresión del lado izquierdo de la igualdad.

$\dfrac{\cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cot\beta}{\cot\beta} = 2\operatorname{sen}\beta$ Expresión dada.

$= \dfrac{\cos\beta}{\cot\beta} + \dfrac{\operatorname{sen}\beta \cdot \cancel{\cot\beta}}{\cancel{\cot\beta}}$ Se aplica la propiedad distributiva en el lado izquierdo.

$= \dfrac{\cos\beta}{\cot\beta} + \operatorname{sen}\beta$ Se simplifica la segunda fracción.

$= \dfrac{\dfrac{\cos\beta}{1}}{\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}} + \operatorname{sen}\beta$ Se expresa la operación en términos de senos y cosenos.

$= \dfrac{\dfrac{\cancel{\cos\beta}}{1}}{\dfrac{\cancel{\cos\beta}}{\operatorname{sen}\beta}} + \operatorname{sen}\beta$ Se simplifican los cosenos.

$= \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\beta$ Se simplifica la expresión.

$= 2\operatorname{sen}\beta$ Se realizan operaciones.

Como al realizar las transformaciones y simplificar se obtiene la misma expresión que hay en la derecha de la igualdad, se verifica que:

$$\frac{\cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cot\beta}{\cot\beta} = 2\operatorname{sen}\beta$$

2. Demostrar que las siguientes igualdades son identidades trigonométricas. Para ello, transformar los dos lados de la igualdad.

a. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$

Primero, se escriben las expresiones de los dos lados de la igualdad en términos de senos y cosenos.

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x = \cos x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Segundo, se realizan operaciones a ambos lados.

$$\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Luego, se remplaza la expresión de la izquierda por la identidad pitagórica, y la del lado derecho se deja igual.

$$\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}$$

Por tanto, la igualdad que se presentó inicialmente es una identidad. Es decir que: $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$.

b. $\dfrac{1}{1 + \tan^2\beta} = (1 - \operatorname{sen}\beta)(1 + \operatorname{sen}\beta)$

Primero, se escriben en términos de seno y coseno las expresiones que se pueda. En este caso, el lado izquierdo de la igualdad.

$$\frac{1}{1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}} = (1 - \operatorname{sen}\beta)(1 + \operatorname{sen}\beta)$$

Segundo, se realizan operaciones a ambos lados de la igualdad.

$$\frac{1}{\dfrac{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\beta}} = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$$

Tercero, se simplifica si es posible.

$$\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta} = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$$

Luego, se remplazan las expresiones por otras utilizando las identidades. En este caso, el denominador de la expresión de la izquierda y la expresión de la derecha.

$$\frac{\cos^2\beta}{1} = \cos^2\beta$$

Finalmente, se simplifica y se obtiene la siguiente igualdad.

$$\cos^2\beta = \cos^2\beta$$

De esta forma se demuestra esta identidad.

c. $\csc^4 t - \cot^4 t = \cot^2 t + \csc^2 t$

$\csc^4 t - \cot^4 t = \cot^2 t + \csc^2 t$ Expresión dada.

$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^4 t} - \dfrac{\cos^4 t}{\operatorname{sen}^4 t} = \dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$ Se espresa en términos de sen t y cos t.

$\dfrac{1 - \cos^4 t}{\operatorname{sen}^4 t} = \dfrac{\cos^2 t + 1}{\operatorname{sen}^2 t}$ Suma de fracciones homogéneas.

$\dfrac{(1 - \cos^2 t)(1 + \cos^2 t)}{\operatorname{sen}^4 t} = \dfrac{\cos^2 t + 1}{\operatorname{sen}^2 t}$ Se factoriza.

$\dfrac{\operatorname{sen}^2 t(1 + \cos^2 t)}{\operatorname{sen}^4 t} = \dfrac{\cos^2 t + 1}{\operatorname{sen}^2 t}$ Identidad pitagórica.

$\dfrac{1 + \cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + 1}{\operatorname{sen}^2 t}$ Se simplifica.

$\dfrac{\cos^2 t + 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \dfrac{\cos^2 t + 1}{\operatorname{sen}^2 t}$ Se organiza.

Como al simplificar ambos lados de la igualdad se obtiene la misma expresión, se concluye que dicha igualdad es una identidad.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

96. Completa un mapa conceptual como este.

Utiliza los productos notables para verificar si las expresiones son correctas.

97. $(\cos^2 x - 2)^2 = \cos^4 - 4\cos^2 x + 2$

98. $(\operatorname{sen} y + 1)^2 = \operatorname{sen}^2 y + 1$

99. $(\tan z - \cot z)^3 = \tan^3 z - \cot^3 z$

Realiza las operaciones indicadas entre expresiones trigonométricas.

100. $5 \operatorname{sen} x + 2\cos x - 3\operatorname{sen} x - 5\cos x$

101. $\frac{1}{2}\tan\alpha + \frac{3}{5}\cot\alpha - \frac{7}{8}\tan\alpha + 6$

102. $\cos x\,(\operatorname{sen} x)(3\cos x)$

103. $(\tan x)(\cos^2 x \operatorname{sen} x)(\cos x)$

104. $\cos x\,(\sec x + 3\operatorname{sen} x)$

105. $(4\operatorname{sen} x + 4) \div 2$

106. $(\cos^4 y + \cos^3 y)(\cos^3 y + \cos^2 y)$

Factoriza las siguientes expresiones.

107. $-8 + 8\operatorname{sen}^2 x + 12\operatorname{sen}^2 x$

108. $6\tan^2 x - 5\tan x - 25$

109. $\tan^2 x + 4\tan x - 32$

110. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

111. $\sec^2 x \tan^2 x - \tan^3 x$

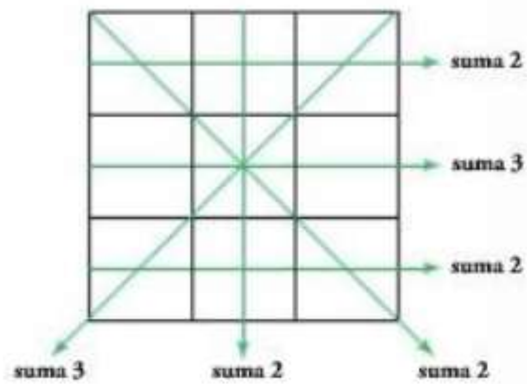
112. $1 + \operatorname{sen}^3 y$

113. $\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - 1$

114. Completa las casillas del cuadrado para que la suma sea la que se indica en cada caso.

Utiliza las expresiones dadas a continuación:

$\operatorname{sen}^2 x$, $\cos^2 x$, $\csc^2 x$, $-\cot^2 x$, $\cos^2 x - \cot^2 x$, $\operatorname{sen}^2 x + \csc^2 x$, 1, $\cos^2 x + \csc^2 x$, $\operatorname{sen}^2 x - \cot^2 x$



115. Observa la demostración hecha y justifica cada paso realizado.

$$\frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

$$\frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} = \frac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} \cdot \frac{\cos A}{\cos A}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen} A)\cdot\cos A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1 - \operatorname{sen} A)\cdot\cos A}{1 - \operatorname{sen}^2 A}$$

$$= \frac{\cancel{(1 - \operatorname{sen} A)}\cdot\cos A}{\cancel{(1 - \operatorname{sen} A)}(1 + \operatorname{sen} A)}$$

$$= \frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}$$

116. Relaciona las expresiones de las casillas que generen una identidad trigonométrica cuyo valor sea igual a 1.

	1	2	3	4
a	$+\cos^2 u$	$-\tan^2 u$	$+\tan u$	$-\cot^2 u$
b	$+\operatorname{sen}^2 u$	$+\cos^2 u$	$+\cot u$	$+\operatorname{sen} u$
c	$+\operatorname{sen} u$	$+\sec^2 u$	$+\csc^2 u$	$+\cos u$

E Demuestra las siguientes identidades.

117. $\csc\theta - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta \cdot \cos\theta$

118. $\operatorname{sen} x + \cos x \cdot \cot x = \csc x$

119. $\cos\theta\,(\tan\theta + 1) = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

120. $\dfrac{\tan x}{\operatorname{sen} x} + \csc x \cot x = \sec x \csc^2 x$

121. $\cos x\,(\sec x - \operatorname{sen} x \tan x) = \cos^2 x$

122. $\cos^2 x\,(1 + \tan^2 x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

123. $(\tan u + \cot u)(\cos u + \operatorname{sen} u) = \csc u + \sec u$

124. $(1 + \csc x)(1 - \operatorname{sen} x) = \cot x \cos x$

125. $\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$

$= (1 - \operatorname{sen} x \cos x)(\operatorname{sen} x + \cos x)$

126. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

127. $\operatorname{sen}^4 r - \cos^4 r = \operatorname{sen}^2 r - \cos^2 r$

128. $\tan^4 k - \sec^4 k = 1 - 2\sec^2 k$

129. $\tan^4 x + \tan^2 x = \sec^4 x - \sec^2 x$

130. $\dfrac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

131. $4\cot x \csc x = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x} - \dfrac{\csc x - \cot x}{\csc x + \cot x}$

132. $(\sec x + \tan x)^2 = \dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

133. $\left(\dfrac{\sec\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\csc\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\cdot \operatorname{sen}^2\alpha = \sec^2\alpha$

134. $\dfrac{(\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha)\cdot(\csc\alpha)}{\cot\alpha} = \cot\alpha$

135. $\dfrac{\cos\alpha\cdot(\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)^2}{1 - 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha} = \cos\alpha$

136. $(\tan\alpha + \cot\alpha)^2 - \csc^2\alpha = \sec^2\alpha$

137. $\dfrac{1}{1-\cos\gamma} + \dfrac{1}{1+\cos\gamma} = 2\csc^2\gamma$

138. $\dfrac{\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x}{\cos x - \operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

139. $(a\cos t - b\operatorname{sen} t)^2 + (a\operatorname{sen} t + b\cos t)^2$

$= a^2 + b^2$

R Encuentra la expresión que representa m y hace ciertas las identidades.

140. $(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2 = 1 + m$

141. $\sec^2 y + \tan^2 y = (1 - \operatorname{sen}^4 y)\cdot m$

S Resuelve.

El área de un triángulo isósceles, cuyos lados iguales tienen una longitud s y donde el ángulo entre dichos lados es θ, se puede calcular mediante la expresión:

$$A = \frac{1}{2}s^2\left(\frac{1}{\sec\theta\cot\theta}\right)$$

Determina una expresión equivalente para calcular el área de un triángulo isósceles en términos de la función trigonométrica dada.

142. $\operatorname{sen}\theta$ **143.** $\cos\theta$

S La temperatura T (en grados Fahrenheit) del mes de enero, en Chicago está dada por la expresión:

$$T = 26{,}5\left(\frac{1+\tan x}{\sec x + \csc x}\right) + 56{,}5,\ x \neq \frac{\pi}{2}$$

144. Determina una forma más simple de escribir la expresión dada.

145. ¿Cuál es la temperatura mínima de Chicago en enero?

S 146. El crecimiento de una colonia de hormigas durante el invierno está dado por la expresión:

$$\frac{1+\tan^2 x}{\sec^2 x(\operatorname{sen} x + \cos x)}$$

Demuestra que $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ es otra forma expresar el crecimiento de una colonia de hormigas.

S El determinante de una matriz 2 × 2 se calcula como el producto de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria es decir:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

147. ¿Cuál es el determinante de la matriz trigonométrica $\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$?

148. Halla el determinante de la matriz trigonométrica $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & \cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix}$.

Lo que viene...

A continuación sabrás cómo se expresan las identidades para la suma y la diferencia de ángulo. Consulta acerca de qué se tratan estas identidades.

PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

La probabilidad es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados. Si cuenta con las probabilidades, tiene la capacidad de determinar la posibilidad de ocurrencia que tiene cada evento.

ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1. Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas. Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento. Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento. Por ejemplo, si considera el evento “que llueva mañana”, se entiende que si el pronóstico del tiempo dice “la probabilidad de que llueva es cercana a cero”, implica que casi no hay posibilidades de que llueva. En cambio, si informan que la probabilidad de que llueva es 0.90, sabe que es muy posible que llueva. La probabilidad de 0.50 indica que es igual de posible que llueva como que no llueva.

En el contexto de la probabilidad, un experimento es definido como un proceso que genera resultados definidos. Y en cada una de las repeticiones del experimento, habrá uno y sólo uno de los posibles resultados experimentales. A continuación se dan varios ejemplos de experimentos con sus correspondientes resultados.

Experimento	Resultado experimental
Lanzar una moneda	Cara, cruz
Tomar una pieza para inspeccionarla	Con defecto, sin defecto
Realizar una llamada de ventas	Hay compra, no hay compra
Lanzar un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
Jugar un partido de futbol	Ganar, perder, empatar

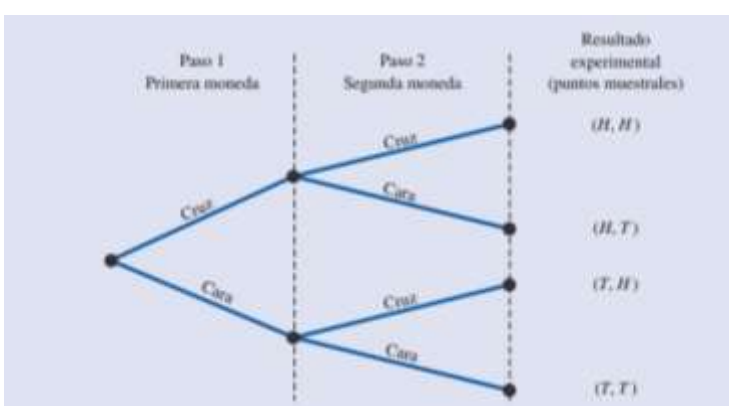
Al especificar todos los resultados experimentales posibles, está definiendo el espacio muestral de un experimento.

El **espacio muestral** de un experimento es el conjunto de todos los resultados experimentales.

REGLAS DE CONTEO, COMBINACIONES Y PERMUTACIONES

REGLA DE CONTEO PARA EXPERIMENTOS DE PASOS MÚLTIPLES

Un experimento se describe como una sucesión de k pasos en los que hay n_1 resultados posibles en el primer paso, n_2 resultados posibles en el segundo paso y así en lo sucesivo, entonces el número total de resultados experimentales es $(n_1)\ (n_2) \ldots (n_k)$.



Un diagrama de árboles una representación gráfica que permite visualizar un experimento de pasos múltiples. La secuencia de los pasos en el diagrama va de izquierda a derecha. El paso 1 corresponde al lanzamiento de la primera moneda, el paso 2 al de la segunda moneda. En cada paso, los dos resultados posibles son cruz o cara. Observe que a cada uno de los resultados posibles en el paso 1 pertenecen dos ramas por los dos posibles resultados en el paso 2. Cada uno de los puntos en el extremo derecho del árbol representa un resultado experimental. Cada trayectoria a través del árbol, desde el nodo más a la izquierda hasta uno de los nodos en el extremo derecho del árbol, muestra una secuencia única de resultados.

COMBINACIONES

REGLA DE CONTEO PARA COMBINACIONES

El número de combinaciones de N objetos tomados de n en n es

$$C_n^N = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

donde

$$N! = N(N-1)(N-2)\cdots(2)(1)$$
$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)$$

y por definición,

$$0! = 1$$

PERMUTACIONES

REGLA DE CONTEO PARA PERMUTACIONES

El número de permutaciones de N objetos tomados de n en n está dado por

$$P_n^N = n!\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!}$$

PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES

REQUERIMIENTOS BÁSICOS PARA LA ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES

1. La probabilidad asignada a cada resultado experimental debe estar entre 0 y 1, inclusive. Si denota con E_i el i-ésimo resultado experimental y con $P(E_i)$ su probabilidad, entonces exprese este requerimiento como

$$0 \le P(E_i) \le 1 \text{ para toda } i \tag{4.3}$$

2. La suma de las probabilidades de los resultados experimentales debe ser igual a 1.0. Para resultados experimentales n escriba este requerimiento como

$$P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) = 1 \tag{4.4}$$

El método clásico de asignación de probabilidades es apropiado cuando todos los resultados experimentales tienen la misma posibilidad. Si existe n resultados experimentales, la probabilidad asignada a cada resultado experimental es $1/n$. Cuando emplee este método, satisfará en automático los dos requerimientos básicos de la asignación de probabilidades.

Por ejemplo, considere el experimento del lanzamiento de una moneda, los dos resultados experimentales —cruz o cara— tienen la misma posibilidad. Como uno de los dos resultados igualmente posibles es cara, la probabilidad de que caiga cara es 1/2 o 0.50. Asimismo, la probabilidad de que caiga cruz también es 1/2 o 0.50.

Otro ejemplo, considere el experimento de lanzar un dado. Es razonable pensar que los seis resultados que pueden presentarse son igualmente posibles y, por tanto, la probabilidad asignada a cada resultado es $1/6$. Si $P(1)$ denota la probabilidad de que la cara del dado que caiga hacia arriba sea la que tiene un punto, entonces $P(1) = 1/6$. De manera similar $P(2) = 1/6$, $P(3) = 1/6$, $P(4) = 1/6$, $P(5) = 1/6$ y $P(6) = 1/6$. Observe que dichas probabilidades satisfacen los dos requerimientos básicos de las ecuaciones (4.3) y (4.4), porque cada una es mayor o igual que cero y juntas suman 1.0.

El método de frecuencia relativa para la asignación de probabilidades es el más conveniente cuando existen datos para estimar la proporción de veces que se presentarán los resultados si el experimento se repite muchas veces. Considere, por ejemplo un estudio sobre los tiempos de espera en el departamento de rayos x de un hospital pequeño. Durante 20 días sucesivos un empleado registra el número de personas que están esperando el servicio a las 9:00 a.m.; los resultados son los siguientes.

Número de personas que esperan		Número de días: resultados de ocurrencia
0		2
1		5
2		6
3		4
4		3
	Total	20

En estos datos aparece que 2 de los 20 días, había cero pacientes esperando el servicio, 5 días había un paciente en espera y así sucesivamente. Con el método de la frecuencia relativa, la probabilidad que se le asignará al resultado experimental cero pacientes esperan el servicio, será $2/20 = 0.10$; al resultado experimental un paciente espera el servicio, $\frac{5}{20} = 0.25$; $\frac{6}{20} = 0.30$ a dos pacientes esperan el servicio; $\frac{4}{20} = 0.20$ a tres pacientes esperan el servicio y $\frac{3}{20} = 0.15$ a cuatro pacientes esperan el servicio. Como sucede con el método clásico, al usar el método de frecuencia relativa se satisfacen en automático los dos requerimientos básicos correspondientes a las ecuaciones (4.3) y (4.4).

EVENTOS Y SUS PROBABILIDADES

Un **evento** es una colección de puntos muestrales. La probabilidad de cualquier evento es igual a la suma de las probabilidades de los puntos muestrales que forman el evento.

Para hallar la probabilidad de un evento se tiene en cuenta el número de puntos muestrales del evento y el número de puntos muestrales del espacio muestral, y se emplea la siguiente fórmula.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

NOTAS Y COMENTARIOS

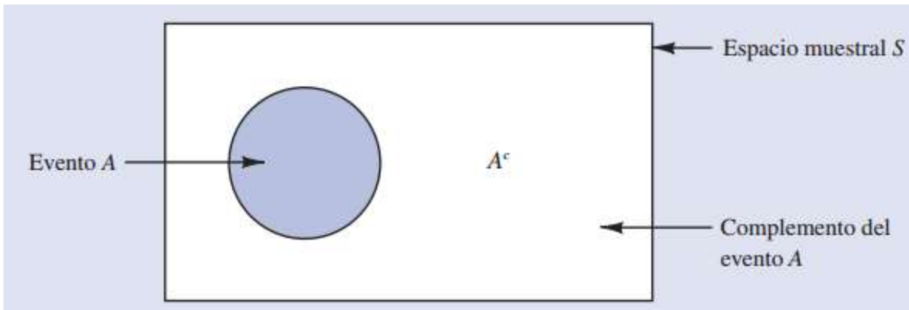
1. El espacio muestral S es un evento. Puesto que contiene todos los resultados experimentales, su probabilidad es 1; es decir $P(S) = 1$.
2. Cuando se usa el método clásico para asignar probabilidades, se parte de que todos los resultados experimentales son igualmente posibles. En tales casos la probabilidad de un evento es calculable contando el número de resultados experimentales que hay en el evento y dividiendo el resultado entre el número total de resultados experimentales.

OPERACIONES ENTRE EVENTOS

COMPLEMENTO DE UN EVENTO

CÁLCULO DE UNA PROBABILIDAD USANDO EL COMPLEMENTO

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$



Por ejemplo, considere el caso de un administrador de ventas que, después de revisar los informes de ventas, encuentra que 80% de los contactos con clientes nuevos no producen ninguna venta. Si A denota el evento hubo venta y A^C el evento no hubo venta, el administrador tiene que $P(A^C) = 0.80$. Mediante la ecuación se ve que:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 0.80 = 0.20$$

La conclusión es que la probabilidad de una venta en el contacto con un cliente nuevo es 0.20.

LEY DE LA ADICIÓN DE EVENTOS

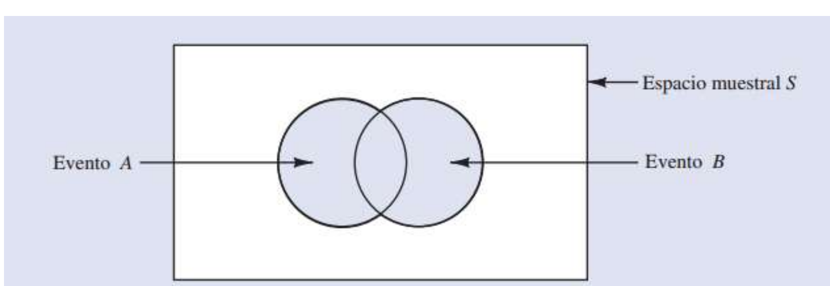
La ley de la adición sirve para determinar la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de dos eventos. Es decir, si A y B son eventos, nos interesa hallar la probabilidad de que ocurra el evento A o el B o ambos.

Antes de presentar la ley de la adición es necesario ver dos conceptos relacionados con la combinación de eventos: la unión y la intersección de eventos. Dados dos eventos, A y B, la unión de A y B se define.

UNIÓN DE DOS EVENTOS

La unión de A y B es el evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen a A o a B o a ambos. La unión se denota $A \cup B$.

El diagrama de Venn de la siguiente figura representa la unión de los eventos A y B. Observe que en los dos círculos están contenidos todos los puntos muestrales del evento A y todos los puntos muestrales del evento B. El que los círculos se traslapen indica que algunos puntos muestrales están contenidos tanto en A como en B.

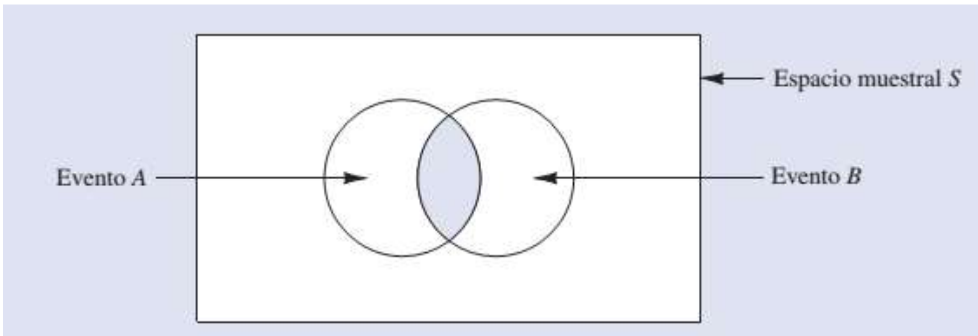


A continuación la definición de la intersección entre A y B.

INTERSECCIÓN DE DOS EVENTOS

Dados dos eventos A y B, la intersección de A y B es el evento que contiene los puntos muestrales que pertenecen tanto a A como a B.

El diagrama de Venn ilustra la intersección de los eventos A y B mostrados en la siguiente figura. El área donde los círculos se sobreponen es la intersección que contiene una muestra de los puntos que están tanto en A como en B.



Ahora ya puede continuar con la ley de la adición. La ley de la adición proporciona una manera de calcular la probabilidad de que ocurra el evento A o el evento B o ambos. En otras palabras, la ley de la adición se emplea para calcular la probabilidad de la unión de los dos eventos. La ley de la adición se expresa:

LEY DE LA ADICIÓN

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Para que logre un entendimiento intuitivo de la ley de la adición, observe que en la ley de la adición, los dos primeros términos $P(A) + P(B)$, corresponden a los puntos muestrales en $A \cup B$. Pero, como los puntos muestrales que se encuentran en la intersección $A \cup B$ están tanto en A como en B, cuando se calcula $P(A) + P(B)$, los puntos que se encuentran en $A \cup B$ cuentan dos veces. Esto se corrige restando $P(A \cup B)$.

Para ver un ejemplo de la aplicación de la ley de la adición, considere el caso de una pequeña empresa de ensamble en la que hay 50 empleados. Se espera que todos los trabajadores terminen su trabajo a tiempo y que pase la inspección final. A veces, alguno de los empleados no satisface el estándar de desempeño, ya sea porque no termina a tiempo su trabajo o porque no ensambla bien una pieza. Al final del periodo de evaluación del desempeño, el jefe de producción encuentra que 5 de los 50 trabajadores no terminaron su trabajo a tiempo, 6 de los 50 trabajadores ensamblaron mal una pieza y 2 de los 50 trabajadores no terminaron su trabajo a tiempo y armaron mal una pieza.

Sea

L = el evento no se terminó el trabajo a tiempo
D = el evento se armó mal la pieza

La información de las frecuencias relativas lleva a las probabilidades siguientes.

$$P(L) = \frac{5}{50} = 0.10$$

$$P(D) = \frac{6}{50} = 0.12$$

$$P(L \cap D) = \frac{2}{50} = 0.04$$

Después de analizar los datos del desempeño, el jefe de producción decide dar una calificación baja al desempeño de los trabajadores que no terminaron a tiempo su trabajo o que armaron mal alguna pieza; por tanto, el evento de interés es $L \cup D$. ¿Cuál es la probabilidad de que el jefe de producción dé a un trabajador una calificación baja de desempeño?

Observe que esta pregunta sobre probabilidad se refiere a la unión de dos eventos. En concreto, se desea hallar $P(L \cup D)$, usando la ecuación correspondiente se tiene:

$$P(L \cup D) = P(L) + P(D) - P(L \cap D)$$

Como conoce las tres probabilidades del lado derecho de esta expresión, se tiene

$$P(L \cup D) = 0.10 + 0.12 - 0.04 = 0.18$$

Estos cálculos indican que la probabilidad de que un empleado elegido al azar obtenga una calificación baja por su desempeño es 0.18.

Antes de concluir el estudio de la ley de la adición se considerará un caso especial que surge cuando los eventos son mutuamente excluyentes.

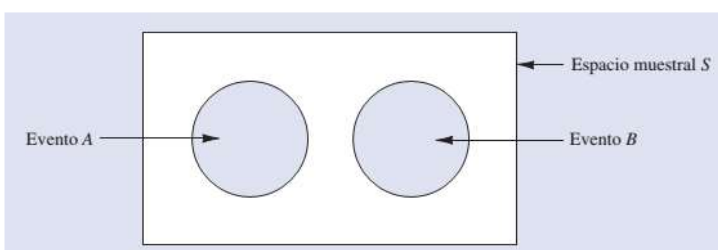
EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común.

LEY DE LA ADICIÓN PARA EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Diagrama de Venn, para eventos mutuamente excluyentes.



ACTIVIDAD

1. Suponga que tiene un espacio muestral con cinco resultados experimentales que son igualmente posibles: $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,$ y E_5. Sean:

$$A = \{E_1,\ E_2\}$$

$$B = \{E_3,\ E_4\}$$

$$C = \{E_2,\ E_3,\ E_5\}$$

a. Halle $P(A), P(B)$ y $P(C)$.
b. Calcule $P(A \cup B)$. ¿A y B son mutuamente excluyentes?
c. Estime A^c, C^c, $P(A^c)$ y $P(C^c)$.
d. Halle $A \cap B$ y $P(A \cap B^c)$.
e. Halle $P(B \cup C)$

2. Suponga que se tiene el espacio muestral $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$, donde E_1, E_2, ..., E_7 denotan puntos muestrales. La asignación de probabilidades es la siguiente: $P(E_1) = 0.05, P(E_2) = 0.20, P(E_3) = 0.20, P(E_4) = 0.25, P(E_5) = 0.15, P(E_6) = 0.10$ y $P(E_7) = 0.05$. Sea:

$$A = \{E_1, E_4, E_6\}$$
$$B = \{E_2, E_4, E_7\}$$
$$C = \{E_2, E_3, E_5, E_7\}$$

a. Halle $P(A), P(B)$ y $P(C)$.
b. Encuentre $A \cup B$ y $P(A \cup B)$
c. Halle $A \cap B$ y $P(A \cap B)$. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?
d. Halle B^c y $P(B^c)$

3. Las autoridades de Clarkson University realizaron un sondeo entre sus alumnos para conocer su opinión acerca de su universidad. Una pregunta fue si la universidad no satisface sus expectativas, si las satisface o si supera sus expectativas. Encontraron que 4% de los interrogados no dieron una respuesta, 26% respondieron que la universidad no llenaba sus expectativas y 56%indicó que la universidad superaba sus expectativas.
a. Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad supera sus expectativas?
b. Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad supera sus expectativas?

4. La Oficina de Censos de Estados Unidos cuenta con datos sobre la cantidad de adultos jóvenes, entre 18 y 24 años, que viven en casa de sus padres. Sea:

M: El evento adulto joven que vive en casa de sus padres
F: El evento adulta joven que vive en casa de sus padres

Si toma al azar un adulto joven y una adulta joven, los datos de dicha oficina permiten concluir que $P(M) = 0.56$ y $P(F) = 0.42$ (The World Almanac, 2006). La probabilidad de que ambos vivan en casa de sus padres es 0.24.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de dos adultos jóvenes seleccionados viva en casa de sus padres?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos adultos jóvenes seleccionados vivan en casa de sus padres?

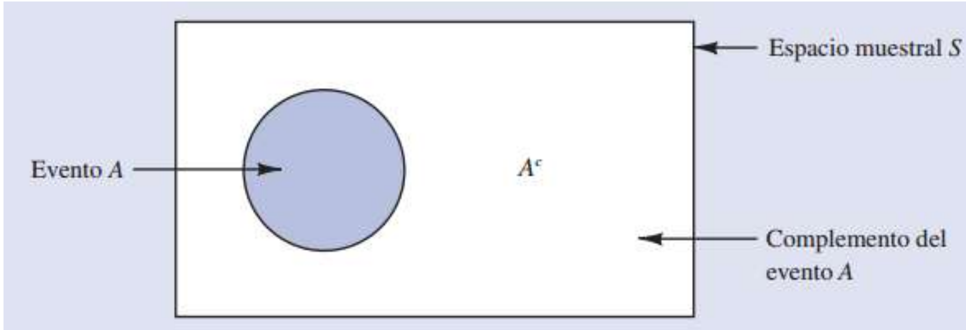
EVENTOS Y SUS PROBABILIDADES

Un **evento** es una colección de puntos muestrales. La probabilidad de cualquier evento es igual a la suma de las probabilidades de los puntos muestrales que forman el evento.

Para hallar la probabilidad de un evento se tiene en cuenta el número de puntos muestrales del evento y el número de puntos muestrales del espacio muestral, y se emplea la siguiente fórmula.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

COMPLEMENTO DE UN EVENTO



CÁLCULO DE UNA PROBABILIDAD USANDO EL COMPLEMENTO

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

Por ejemplo, considere el caso de un administrador de ventas que, después de revisar los informes de ventas, encuentra que 80% de los contactos con clientes nuevos no producen ninguna venta. Si A denota el evento hubo venta y A^C el evento no hubo venta, el administrador tiene que $P(A^C) = 0.80$. Mediante la ecuación se ve que:

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - 0.80 = 0.20$$

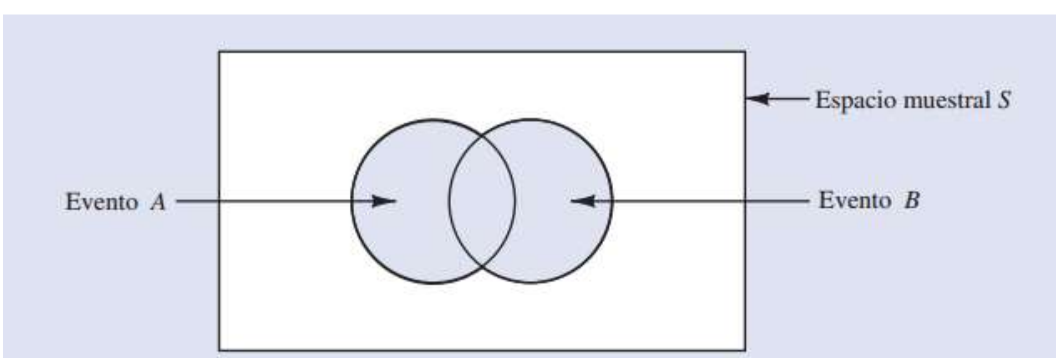
La conclusión es que la probabilidad de una venta en el contacto con un cliente nuevo es 0.20.

LEY DE LA ADICIÓN DE EVENTOS

La ley de la adición sirve para determinar la probabilidad de que ocurra por lo menos uno de dos eventos. Es decir, si Ay B son eventos, nos interesa hallar la probabilidad de que ocurra el evento A o el B o ambos.

UNIÓN DE DOS EVENTOS

La unión de A y B es el evento que contiene todos los puntos muestrales que pertenecen a A o a B o a ambos. La unión se denota $A \cup B$.



INTERSECCIÓN DE DOS EVENTOS

Dados dos eventos A y B, la intersección de A y B es el evento que contiene los puntos muestrales que pertenecen tanto a A como a B.

LEY DE LA ADICIÓN

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Antes de concluir el estudio de la ley de la adición se considerará un caso especial que surge cuando los eventos son mutuamente excluyentes.

EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Se dice que dos eventos son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común.

LEY DE LA ADICIÓN PARA EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ACTIVIDAD

5. Suponga que tiene un espacio muestral con cinco resultados experimentales que son igualmente posibles: $E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4,$ y E_5. Sean:

$$A = \{E_1,\ E_2\}$$

$$B = \{E_3,\ E_4\}$$

$$C = \{E_2,\ E_3,\ E_5\}$$

   f. Halle $P(A), P(B)$ y $P(C)$.
   g. Calcule $P(A \cup B)$. ¿A y B son mutuamente excluyentes?
   h. Estime A^c, C^c, $P(A^c)$ y $P(C^c)$.
   i. Halle $A \cap B$ y $P(A \cap B^c)$.
   j. Halle $P(B \cup C)$

6. Suponga que se tiene el espacio muestral $S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, E_7\}$, donde E_1, E_2, ..., E_7 denotan puntos muestrales. La asignación de probabilidades es la siguiente: $P(E_1) = 0.05$, $P(E_2) = 0.20$, $P(E_3) = 0.20$, $P(E_4) = 0.25$, $P(E_5) = 0.15$, $P(E_6) = 0.10$ y $P(E_7) = 0.05$. Sea:

$$A = \{E_1, E_4, E_6\}$$
$$B = \{E_2, E_4, E_7\}$$

$$C = \{E_2, E_3, E_5, E_7\}$$

e. Halle $P(A), P(B)$ y $P(C)$.

f. Encuentre $A \cup B$ y $P(A \cup B)$

g. Halle $A \cap B$ y $P(A \cap B)$. ¿Los eventos A y B son mutuamente excluyentes?

h. Halle B^c y $P(B^c)$

7. Las autoridades de Clarkson University realizaron un sondeo entre sus alumnos para conocer su opinión acerca de su universidad. Una pregunta fue si la universidad no satisface sus expectativas, si las satisface o si supera sus expectativas. Encontraron que 4% de los interrogados no dieron una respuesta, 26% respondieron que la universidad no llenaba sus expectativas y 56%indicó que la universidad superaba sus expectativas.

   c. Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad supera sus expectativas?

   d. Si toma un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que diga que la universidad supera sus expectativas?

8. La Oficina de Censos de Estados Unidos cuenta con datos sobre la cantidad de adultos jóvenes, entre 18 y 24 años, que viven en casa de sus padres. Sea:

   M: El evento adulto joven que vive en casa de sus padres

   F: El evento adulta joven que vive en casa de sus padres

   Si toma al azar un adulto joven y una adulta joven, los datos de dicha oficina permiten concluir que $P(M) = 0.56$ y $P(F) = 0.42$ (The World Almanac, 2006). La probabilidad de que ambos vivan en casa de sus padres es 0.24.

   c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de dos adultos jóvenes seleccionados viva en casa de sus padres?

   d. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos adultos jóvenes seleccionados vivan en casa de sus padres?

Probabilidad condicional

Con frecuencia, en la probabilidad de un evento influye el hecho de que un evento relacionado con él ya haya ocurrido. Suponga que tiene un evento A cuya probabilidad es P(A). Si obtiene información nueva y sabe que un evento relacionado con él, denotado por B, ya ha ocurrido, deseará aprovechar esta información y volver a calcular la probabilidad del evento A. A esta nueva probabilidad del evento Ase le conoce como probabilidad condicional y se expresa P(A| B). La notación | indica que se está considerando la probabilidad del evento A dada la condición de que el evento B ha ocurrido. Por tanto, la notación P(A| B) se lee "la probabilidad de A dado B".

Como ejemplo de la probabilidad condicional, considere el caso de las promociones de los agentes de policía de una determinada ciudad. La fuerza policiaca consta de 1200 agentes, 960 hombres y 240 mujeres. De éstos, en los últimos dos años, fueron promovidos 340. En la tabla se muestra cómo quedaron repartidas estas promociones entre los hombres y mujeres. Después de analizar el registro de las promociones, un comité femenil protestó, ya que habían sido promovidos 288 agentes hombres, frente a sólo 36 mujeres. Los directivos de la fuerza policiaca argumentaron que el número de mujeres promovidas no se debía a una discriminación, sino a que el número de mujeres que son agentes de policía es una cantidad pequeña. Ahora verá cómo emplear la probabilidad condicional para analizar esta acusación de discriminación.

Sean

M = el evento que un agente de policía sea hombre
W = el evento que un agente de policía sea mujer
A = el evento que un agente de policía sea promovido
A^c = el evento que un agente de policía no sea promovido

Dividir los valores de los datos de la tabla 4.4 entre el total de agentes de policía, 1200, permite concretar la información que se tiene en las probabilidades siguientes:

$P(M \cap A) = 288/1200 = 0.24$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea hombre *y* haya sido promovido
$P(M \cap A^c) = 672/1200 = 0.56$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea hombre *y* no haya sido promovido
$P(W \cap A) = 36/1200 = 0.03$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea mujer *y* haya sido promovido
$P(W \cap A^c) = 204/1200 = 0.17$ = probabilidad de que un agente de policía, escogido en forma aleatoria, sea mujer *y* no haya sido promovido

Como cada uno de estos valores da la probabilidad de la intersección de dos eventos, se les llama probabilidades conjuntas. A la siguiente tabla, que proporciona la información de las probabilidades de promoción de los agentes de policía, se le conoce como tabla de probabilidades conjuntas.

TABLA 4.5 TABLA DE PROBABILIDAD CONJUNTA PARA LAS PROMOCIONES

Las probabilidades conjuntas aparecen en el cuerpo de la tabla.

	Hombre (M)	Mujer (W)	Total
Promovido (A)	0.24	0.03	0.27
No promovido (A^c)	0.56	0.17	0.73
Total	0.80	0.20	1.00

Las probabilidades marginales aparecen en los márgenes de la tabla.

PROBABILIDAD CONDICIONAL

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

o

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ACTIVIDAD

1. Suponga dos eventos, Ay B, y que P(A) =0.50, P(B) =0.60 y P(A∩B) =0.40.
   a. Halle P(A| B).
   b. Halle P(B | A).
   c. ¿A y B son independientes? ¿Por qué sí o por qué no?
2. Suponga dos eventos, Ay B, que son mutuamente excluyentes. Admita, además, que P(A) =0.30 y P(B) =0.40.
   a. Obtenga P(A∩B).
   b. Calcule P(A| B).
   c. Un estudiante de estadística argumenta que los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes son en realidad lo mismo y que si los eventos son mutuamente excluyentes deben ser también independientes. ¿Está usted de acuerdo? Use la información sobre las probabilidades para justificar su respuesta.
   d. Dados los resultados obtenidos, ¿qué conclusión sacaría usted acerca de los eventos mutuamente excluyentes e independientes?
3. Debido al aumento de los costos de los seguros, en Estados Unidos 43 millones de personas no cuentan con un seguro médico (Time, 1 de diciembre de 2003). En la tabla siguiente se muestran datos muestrales representativos de la cantidad de personas que cuentan con seguro médico.

		Seguro médico	
		Sí	**No**
Edad	**18 a 34**	750	170
	35 o mayor	950	130

   a. Con estos datos elabore una tabla de probabilidad conjunta y úsela para responder las preguntas restantes.

b. ¿Qué indican las probabilidades marginales acerca de la edad de la población de Estados Unidos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona tomada en forma aleatoria no tenga seguro médico?
d. Si la persona tiene entre 18 y 34 años, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?
e. Si la persona tiene 34 años o más ¿cuál es la probabilidad de que no tenga seguro médico?
f. Si la persona no tiene seguro médico, ¿cuál es la probabilidad de que tenga entre 18 y 34 años?
g. ¿Qué indica esta información acerca del seguro médico en Estados Unidos?

SALIDA. Evaluación, refuerzo o planes de mejoramiento.

HETEROEVALUACIÓN: Cada una de las actividades realizadas tendrá su respectiva calificación. Se tendrá en cuenta, la participación y la calidad de los trabajos.

AUTOEVALUACIÓN: Marca con una X la valoración que crees merecer.

CRITERIO	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Dedico el tiempo suficiente para la preparación de las actividades y evaluaciones					
Contribuyo con mi buen comportamiento en el desarrollo de las clases.					
Busco asesoría de compañeros o docente cuando me surgen duras en el proceso de aprendizaje.					
Asumo con responsabilidad el desarrollo de las actividades de clase cuando trabajo en forma individual o en grupo.					
Llevo mis apuntes en el cuaderno de forma clara y ordenada.					
Asisto puntualmente a clase de acuerdo con los horarios establecidos.					
Presento oportunamente mis trabajos y tareas acuerdo con las fechas establecidas.					
Participó activamente en clase contribuyendo al buen desarrollo de la misma.					
Presento los materiales necesarios para el desarrollo de la clase haciendo buen uso de los mismos.					
Aprovecho los espacios de refuerzo y recuperación, para mejorar mis desempeños.					

COEVALUACIÓN: Cada estudiante socializa en plenaria las valoraciones de la auto-evaluación. Los compañeros participan con mucho respeto para manifestar si esas valoraciones corresponden o no a la realidad y hacer los ajustes del caso.