INSTITUCIÓN EDUCATIVA DEPARTAMENTAL MONSEÑOR AGUSTÍN GUTIÉRREZ

GUÍA DE TRABAJO

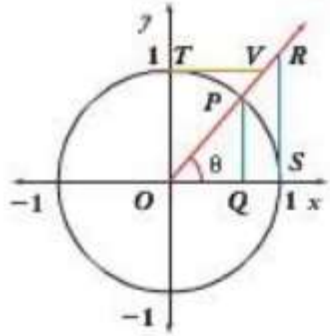
ASIGNATURA	Matemáticas	**CURSO**	Décimo
DOCENTE	Diego Felipe Rodríguez	**PERIODO**	Tercero
FECHA DE INICIO	Julio 2023	**FECHA DE TERMINACIÓN**	Septiembre 2023
COMPETENCIA	**Competencia General:** Determinar el valor de las funciones trigonométricas y las aplica para hallar medidas desconocidas en triángulos rectángulos.		
	Competencia Específica: Resolver problemas relacionados con los triángulos rectángulos.		
DESEMPEÑOS	**PARA APRENDER**	Construye el triángulo rectángulo que satisface una condición dada.	
	PARA HACER	Halla el valor de todas las funciones trigonométricas de un ángulo, a partir de una de ellas.	
	PARA SER	Realiza las actividades propuestas de la guía, como una forma de demostrar su responsabilidad y compromiso.	
	PARA CONVIVIR	Reconoce la importancia de la aplicación de conceptos matemáticos al mejoramiento de su entorno.	
DBA	Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones.		
ESTANDAR	Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias		

INTRODUCCIÓN

Anteriormente se definieron las funciones trigonométricas en la circunferencia unitaria, donde la medida $x\,rad$ se identifica con un número real x. Igualmente, en la circunferencia unitaria se definen las líneas trigonométricas, las cuales permiten realizar el bosquejo de las gráficas de las funciones trigonométricas.

> Las **líneas trigonométricas** de un ángulo θ en posición normal son los segmentos de recta cuyas medidas coinciden con cada una de las funciones trigonométricas para el ángulo θ.

En la figura se muestra la circunferencia unitaria y el punto P de la circunferencia determinado por el ángulo θ del primer cuadrante. Los segmentos $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, que por construcción se trazan perpendiculares al **eje x**, forman los triángulos rectángulos OQP y OSR, respectivamente. Por otra parte el segmento $\overline{TV}$, trazado perpendicular al **eje y**, y forma el triángulo rectángulo VTO.



Por la construcción, se tiene que los triángulos OQP, OSR y VTO son semenjantes, ya que los ángulos correspondientes son congruentes, por tal razón sus lados correspondientes son proporcionales. Considérese el triángulo OQP, por definición se tiene que:

$$\operatorname{sen}\theta = \overline{PQ} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \overline{OQ}.$$

Luego $\overline{PQ}$ es la línea trigonométrica para $\boldsymbol{sen\theta}$ y $\overline{OQ}$ es la línea trigonométrica para $\boldsymbol{cos\theta}$.

Ahora en los triángulos rectángulos OQP y OSR, se cumple que:

$$\tan\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS} \quad \text{y} \quad \sec\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

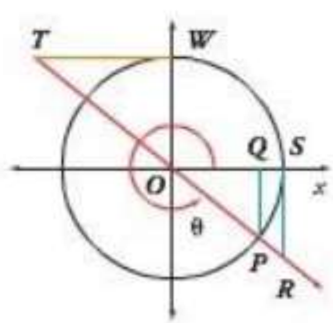
Así, la línea trigonométrica de $\boldsymbol{\tan\theta}$ es $\overline{RS}$ y la línea trigonométrica de $\boldsymbol{\sec\theta}$ es $\overline{OR}$.

En los triángulos rectángulos OQP y VTO, se tiene:

$$\cot\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{VT}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{VT}}{1} = \overline{VT} \quad \text{y} \quad \csc\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{TO}} = \frac{\overline{OV}}{1} = \overline{OV}$$

Por tanto $\overline{VT}$ es la línea trigonométrica de $\boldsymbol{\cot\theta}$ y $\overline{OV}$ es la línea trigonométrica de $\boldsymbol{\csc\theta.}$

Si los ángulos están ubicados en otros cuadrantes, las líneas trigonométricas se construyen en la misma manera, pero considerando los signos. A continuación se muestran las líneas trigonométricas en el cuarto cuadrante.



$\operatorname{sen}\theta = \overline{PQ}$ negativo

$\cos\theta = \overline{OQ}$ positivo

$\tan\theta = \overline{RS}$ negativo

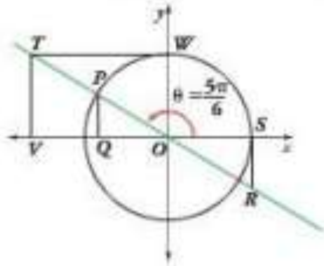
$\cot\theta = \overline{TW}$ negativo

$\sec\theta = \overline{OR}$ positivo

$\csc\theta = \overline{OT}$ negativo

EJEMPLOS

1. Determinar las líneas trigonométricas del ángulo $\pi = \frac{5=}{6}$.



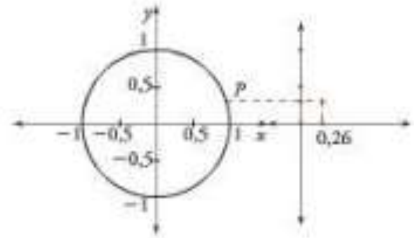
En la figura se observa la construcción de las líneas trigonométricas para el ángulo $\pi = \frac{5=}{6}$. Como está en el segundo cuadrante, entonces, las líneas trigonométricas son:

$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \overline{PQ}$ $\quad$ $\csc\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \overline{OT}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \overline{OQ}$ $\quad$ $\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \overline{OR}$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \overline{RS}$ $\quad$ $\cot\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \overline{TW}$

2. Aproximar la coordenada y del punto P, que se muestra en la siguiente figura. Luego, verificar el resultado con la calculadora.



De acuerdo con la gráfica, la coordenada y del punto P es 0,26.

Como la componente y del punto P coincide aproximadamente con el valor de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right)$, entonces, al usar la calculadora se tiene que:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0,258819$

Por tanto, el valor de y se aproxima a 0,26.

GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para realizar las gráficas de las funciones trigonométricas se procede de la siguiente manera:

Primero, se traza en la circunferencia unitaria y algunos ángulos especiales medidos en radianes e posición normal.

Segundo, se traza la línea trigonométrica respectiva para cada ángulo en relación con la gráfica de la función que se va a construir.

Tercero, por cada medida de los ángulos especiales, se ubica un punto en el **eje x** del plano cartesiano. Luego, se hace corresponder en el **eje y** la respectiva medida de la línea trigonométrica.

Por último, se construye la gráfica de la función uniendo los puntos.

La función $y = senx$ varía de la siguiente manera:

Cuadrante	Variación de x	Variación de $y = \text{sen}\,x$
I	Entre 0 y $\frac{\pi}{2}$	Crece de 0 a 1
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ y π	Decrece de 1 a 0
III	Entre π y $\frac{3\pi}{2}$	Decrece de 0 a -1
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π	Crece de -1 a 0

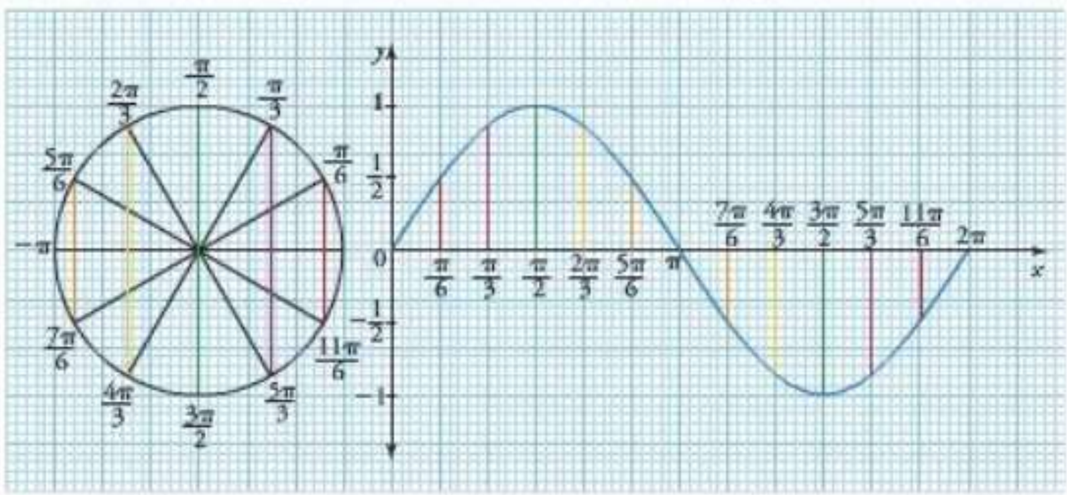
Tabla de valores de $y = \operatorname{sen} x$

x	$\operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0

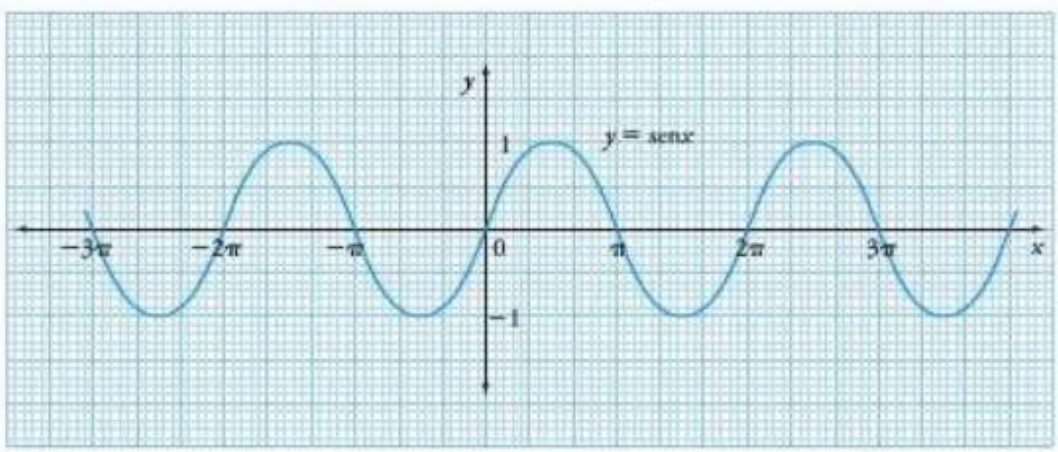
2.1 Gráfica de la función seno ($y = \operatorname{sen} x$)

Ampliación multimedia

Si se sigue el proceso descrito, se obtiene la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y 2π a partir de las líneas trigonométricas, como se muestra en la figura.



Cuando la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$ se construye tomando un intervalo más grande para valores de x, se observa que su gráfica es una repetición del tramo que se ha dibujado en el intervalo de 0 a 2π, en ambos sentidos.



2.2 Gráfica de la función coseno ($y = \cos x$)

En forma similar a la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, se construye la gráfica de la función $y = \cos x$, pero ahora a partir de las líneas trigonométricas de la función $y = \cos x$ entre 0 y 2π.

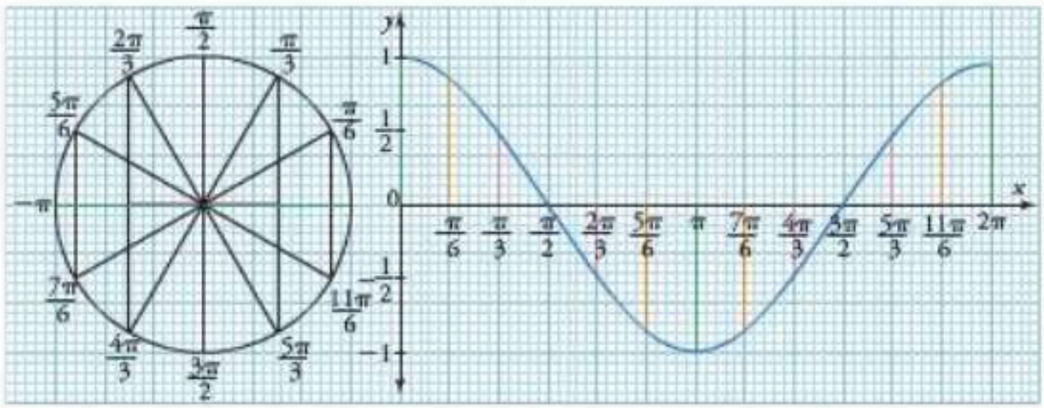
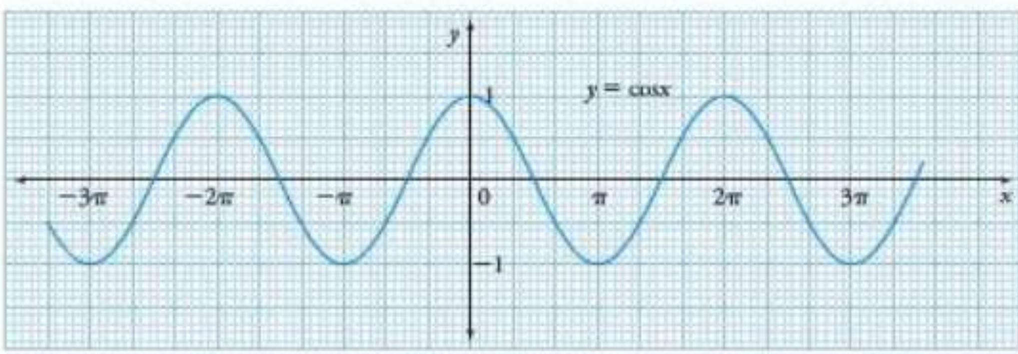


Tabla de valores de $y = \cos x$	
x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	1

En general, la gráfica de la función $y = \cos x$ para un intervalo mayor a 2π es:



La función $y = \cos x$ varía de la siguiente manera:

Cuadrante	Variación x	Variación de $y = \cos x$
I	Entre 0 y $\frac{\pi}{2}$	Decrece de 1 a 0
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ y π	Decrece de 0 a -1
III	Entre π y $\frac{3\pi}{2}$	Crece de -1 a 0
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π	Crece de 0 a 1

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono

Responde. Explica tu respuesta.

14. ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$?

15. ¿Cuál es el período de las funciones $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$?

16. ¿Para qué valores de x, la función $y = \text{sen } x$ obtiene su valor máximo?

Determina si la función $y = \cos x$ es creciente o decreciente para el valor de x dado.

17. $5\pi < x < 6\pi$ ________________

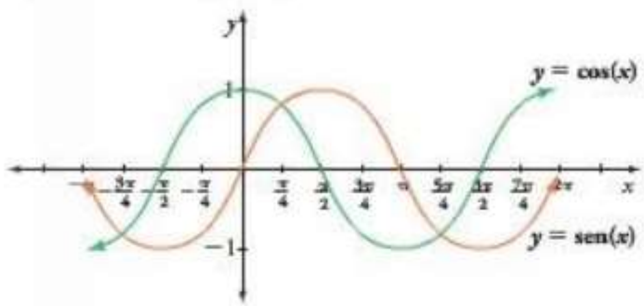
18. $-2\pi < x < -\pi$ ________________

19. $-2\pi > x > -\frac{5\pi}{2}$ ________________

20. $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$ ________________

21. $-\frac{4\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{3}$ ________________

Observa las gráficas de las funciones $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$. Luego, responde.



22. ¿En qué intervalos las dos funciones son crecientes a la vez?

23. ¿En qué intervalos las dos funciones son decrecientes a la vez?

24. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos de corte entre las dos funciones?

25. Al considerar el intervalo 0 a 2π, ¿en qué intervalos $\text{sen } x > \cos x$?

26. ¿En qué intervalos $\cos x > \text{sen } x$?

Realiza el bosquejo de la gráfica de las funciones entre 0 y 2π.

27. $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

28. $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

29. Compara las gráficas de las anteriores funciones con las gráficas de $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$. Luego, formula dos conclusiones.

Resuelve de acuerdo con las siguientes funciones:

$f(x) = \text{sen } x + 1$ $\qquad g(x) = 2\cos(2x)$

$h(x) = |\text{sen } x|$ $\qquad k(x) = 3 + \cos x$

30. Completa la siguiente tabla de valores.

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$k(x)$
0				
$\frac{\pi}{6}$				
$\frac{\pi}{3}$				
$\frac{\pi}{2}$				
$\frac{2\pi}{3}$				
$\frac{5\pi}{6}$				
π				
$\frac{7\pi}{6}$				
$\frac{4\pi}{3}$				
$\frac{3\pi}{2}$				
$\frac{5\pi}{3}$				
$\frac{11\pi}{6}$				
2π				

31. Traza la gráfica de cada función en planos distintos.

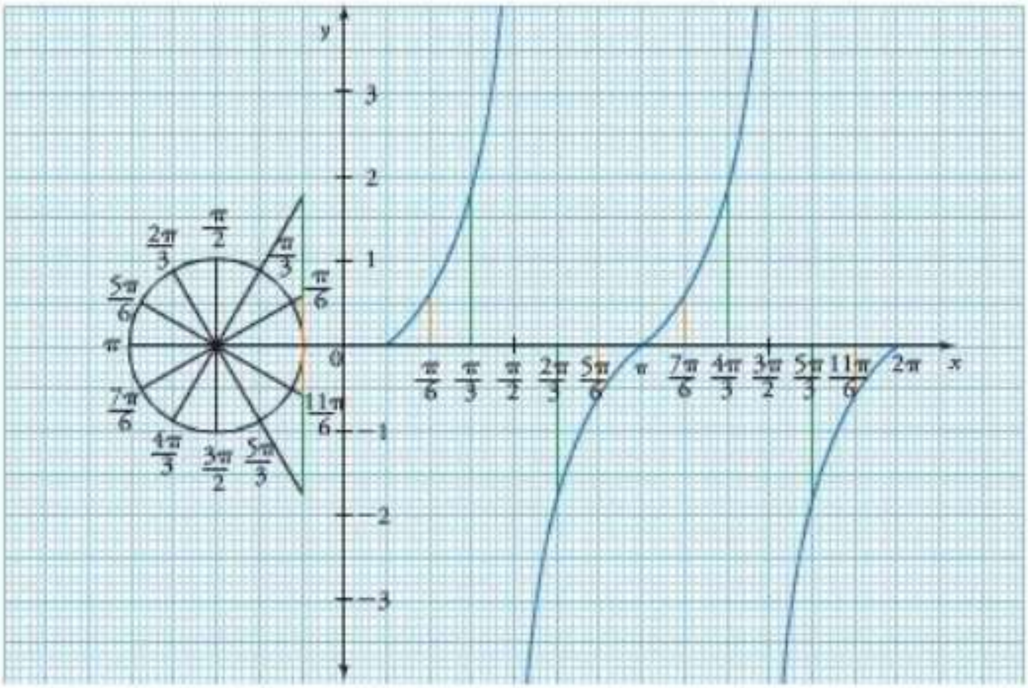
32. Determina el dominio y el rango de cada función.

33. Establece los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

34. Señala el valor máximo que toma cada función.

2.3 Gráfica de la función tangente ($y = \tan x$)

La gráfica de la función $y = \tan x$ se construye a partir de las líneas trigonométricas para valores de x entre 0 y 2π de la función tangente, como se muestra en la siguiente gráfica.



La gráfica de la función $y = \tan x$ para un intervalo mayor a 2π es:

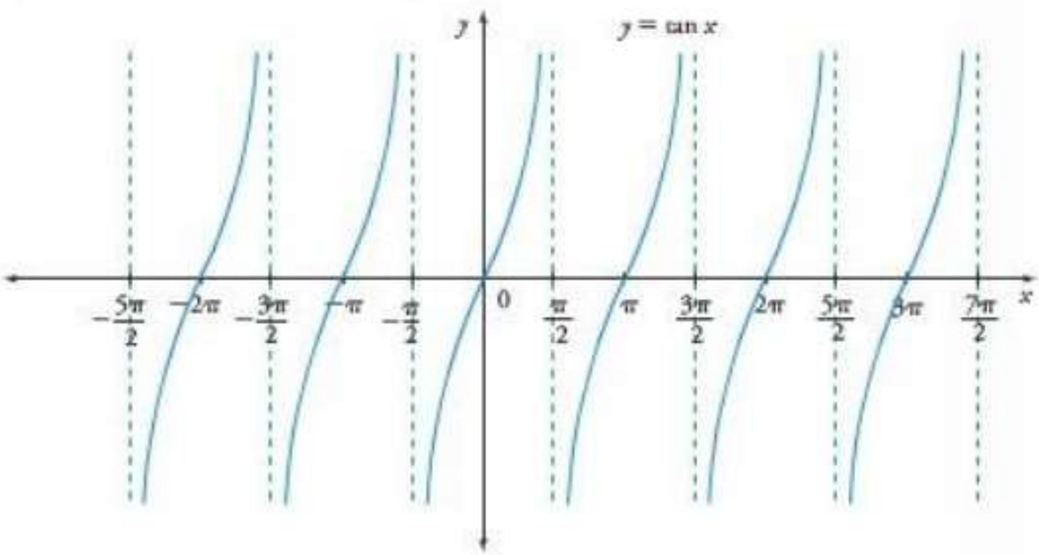


Tabla de valores de $y = \tan x$

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	ND
$\frac{2\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	ND
$\frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
2π	0

2.4 Gráfica de la función cotangente ($y = \cot x$)

La gráfica de la función $y = \cot x$ se construye a partir de las líneas trigonométricas para valores de x entre 0 y 2π de la función cotangente.

La gráfica de la función cotangente es la siguiente:

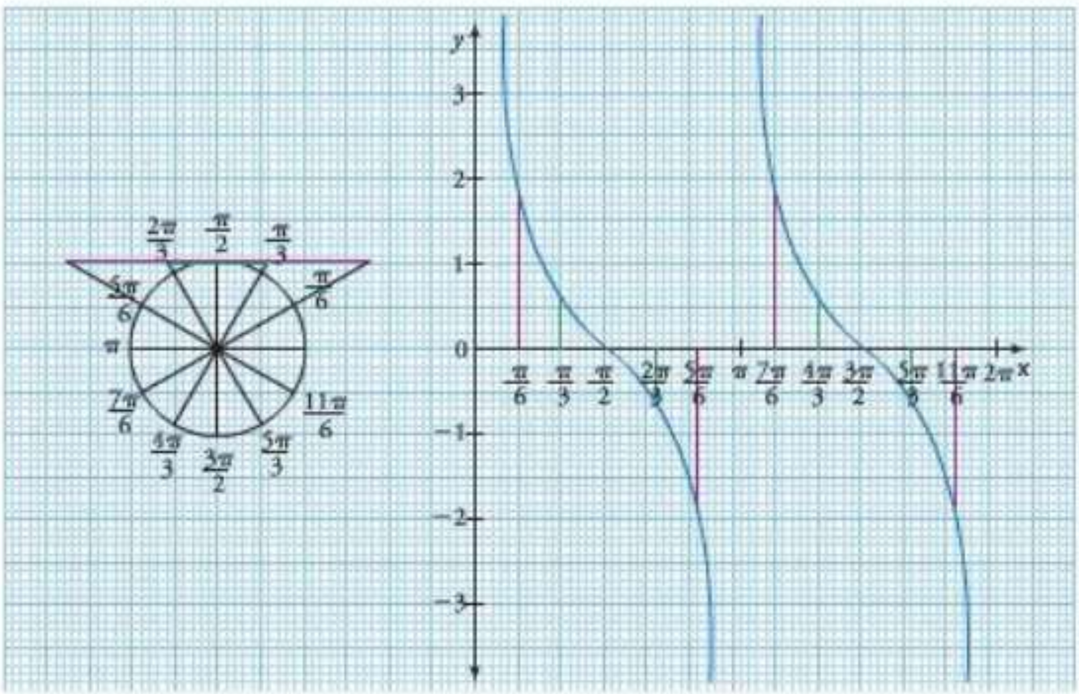
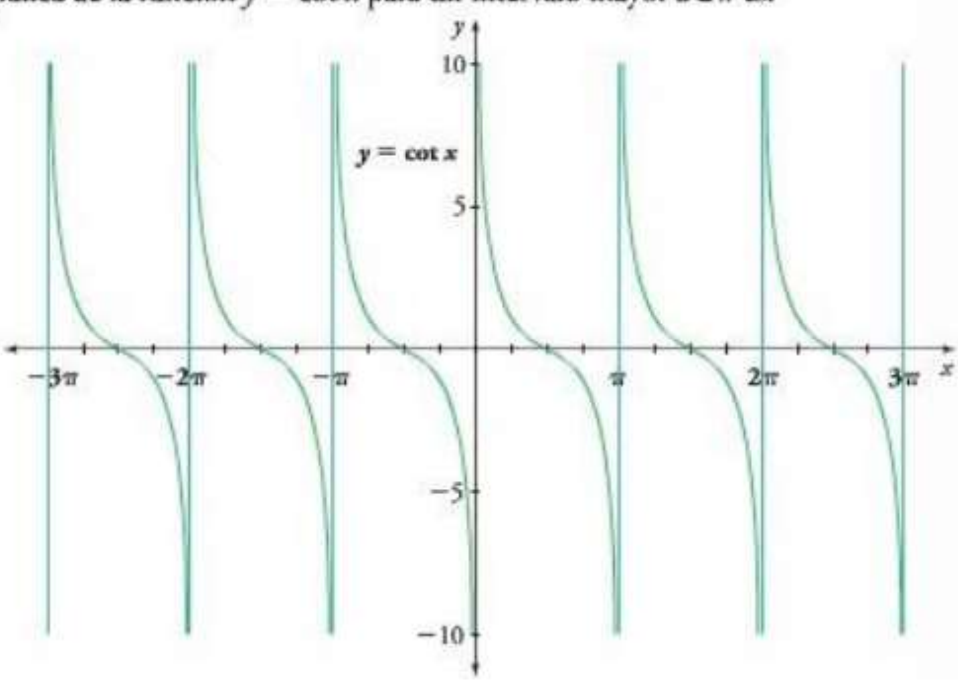


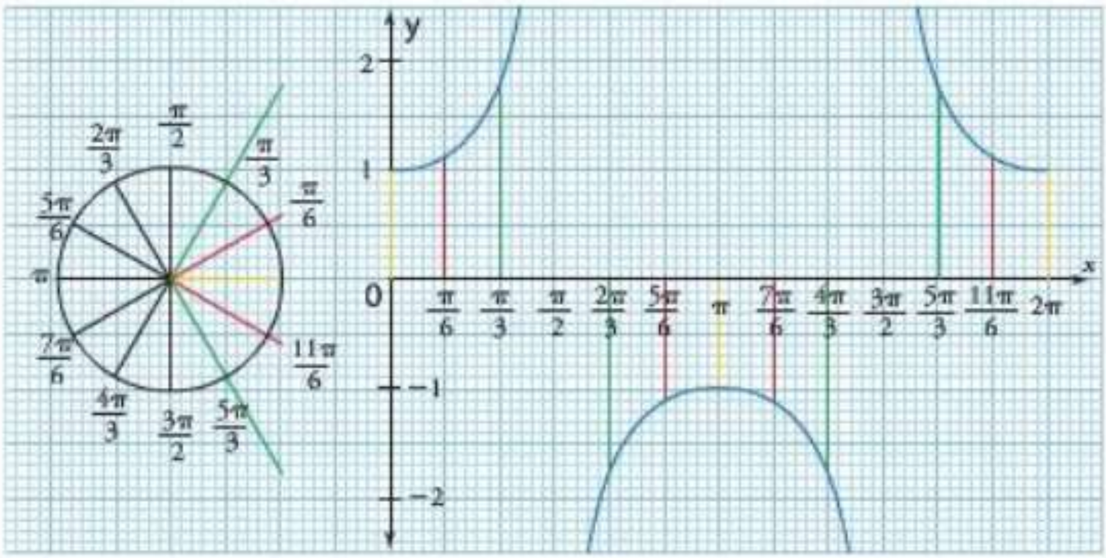
Tabla de valores de $y = \cot x$	
x	$\cot x$
0	ND
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$
π	ND
$\frac{7\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\sqrt{3}$
2π	ND

La gráfica de la función $y = \cot x$ para un intervalo mayor a 2π es:



2.5 Gráfica de la función secante ($y = \sec x$)

La gráfica de la función $y = \sec x$ se construye a partir de las líneas trigonométricas para valores de x entre 0 y 2π de la función secante como se muestra en la siguiente gráfica:



La gráfica de la función $y = \sec x$ para un intervalo mayor a 2π es:

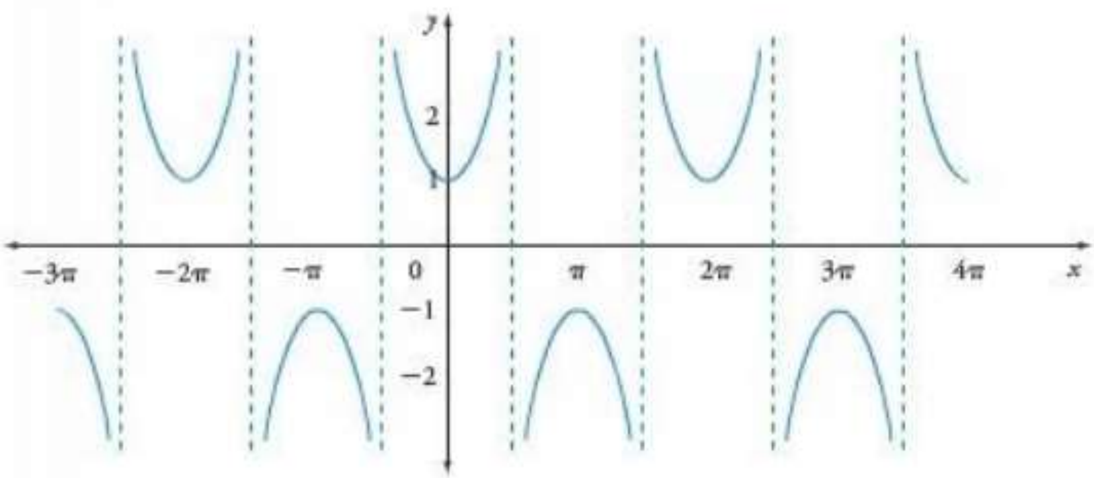
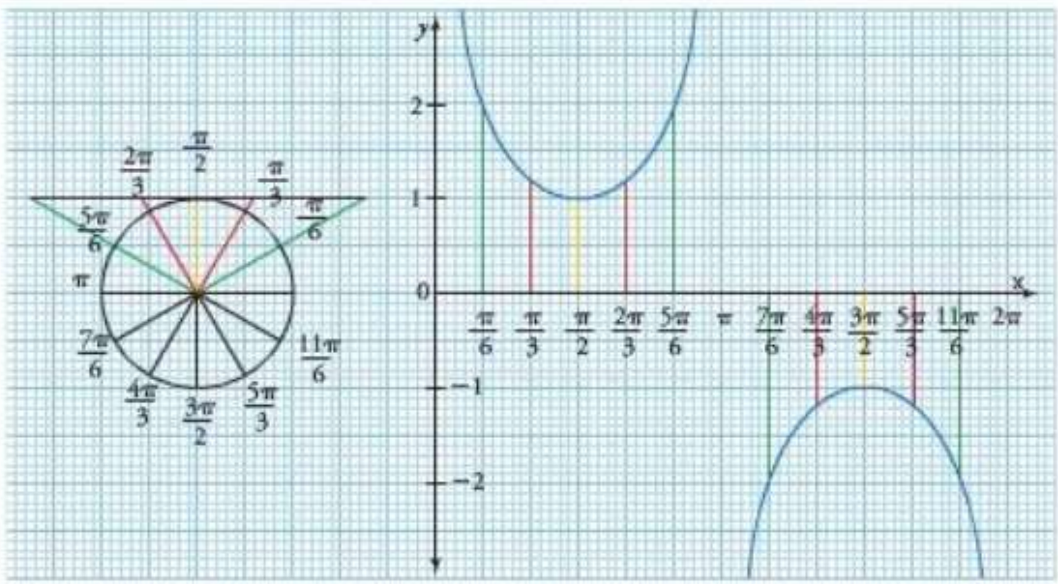


Tabla de valores de $y = \sec x$

x	$\sec x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{3}$	2
$\frac{\pi}{2}$	ND
$\frac{2\pi}{3}$	-2
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
π	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{4\pi}{3}$	-2
$\frac{3\pi}{2}$	ND
$\frac{5\pi}{3}$	2
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
2π	1

2.6 Gráfica de la función cosecante ($y = \csc x$)

La gráfica de la función $y = \csc x$ se construye a partir de las líneas trigonométricas para valores de x entre 0 y 2π de la función cosecante, como se muestra a continuación:



La gráfica de la función $y = \csc x$ para un intervalo mayor a 2π es:

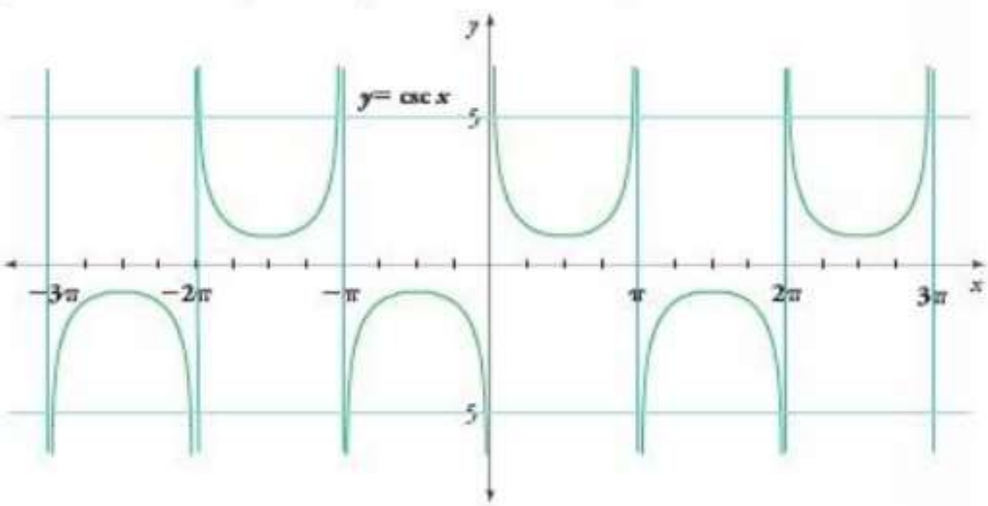


Tabla de valores $y = \csc x$	
x	$\csc x$
0	ND
$\frac{\pi}{6}$	2
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{6}$	2
π	ND
$\frac{7\pi}{6}$	-2
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$\frac{11\pi}{6}$	-2
2π	ND

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Modelo • Ejercito

Responde.

35. ¿Cuáles son las diferencias entre las gráficas de las funciones $y = \tan x$ y $y = \cot x$?

36. ¿Cuáles son los valores de x donde las funciones $y = \tan x$ y $y = \sec x$ es creciente?

37. ¿Cuáles son los valores de x donde las funciones $y = \cot x$ y $y = \csc x$ es decreciente?

38. ¿Cuál es el dominio de las funciones $y = \tan x$ y $y = \sec x$?

Identifica la función trigonométrica que cumple las características que se describen en cada tabla. Justifica tu respuesta.

39.

Es periódica y su período es π.
Su gráfica es simétrica con respecto al origen, es decir, es impar.
No tiene valor máximo ni mínimo.
Presenta asíntotas.
Cuando toma valores muy próximos por la izquierda a sus asíntotas verticales, los valores de la función disminuyen indefinidamente.

40.

Tiene asíntotas verticales.
Tiene por rango el conjunto $\{y \in \mathbb{R} / y \geq 1\} \cup \{y \in \mathbb{R} / y \leq -1\}$
Es periódica con un período 2π.
No tiene valores máximos ni mínimos.
No intersecta al eje x, es decir, no tiene ceros reales.
Es par.
No está definida para los valores $x = n\frac{\pi}{2}$ con n entero impar.

Realiza la gráfica de las siguientes funciones. Luego, indica el período y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

41. $y = 4 \tan x$

42. $y = 2 \csc x$

43. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

44. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Asocia cada una de las funciones con su gráfica correspondiente.

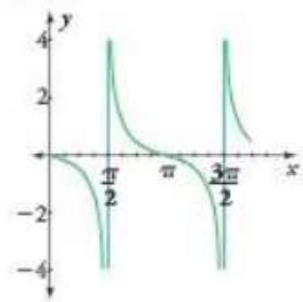
45. $y = 2 \sec x$

46. $y = -\tan x$

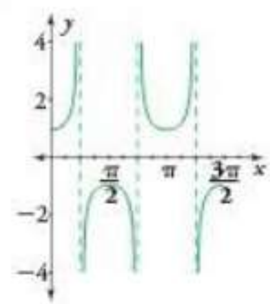
47. $y = \sec(2x)$

48. $y = \cot(2x)$

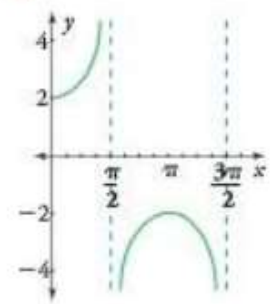
a.



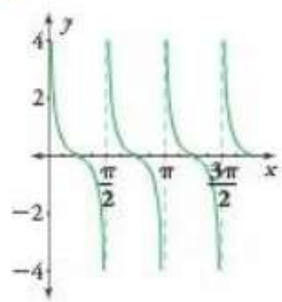
c.



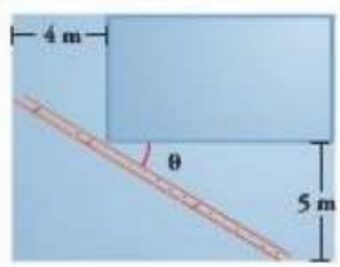
b.



d.



Lee y resuelve. Una escalera de longitud L se carga en forma horizontal y debe pasar por la esquina de un corredor de 4 metros de ancho hacia otro corredor que tiene 5 metros de ancho.



Si la longitud de la escalera se puede expresar en función del ángulo como $L = 4 \sec \theta + 5 \csc \theta$:

49. Utiliza Graph o una calculadora graficadora para realizar la gráfica de la función en el intervalo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

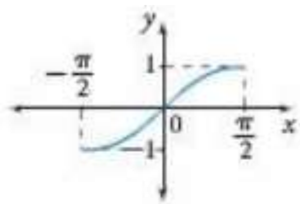
50. Con la ayuda de la gráfica, determina el valor mínimo que toma la función L. ¿Qué significado tiene dicho resultado en el contexto del problema?

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSA

Para determinar cada una de las funciones inversas, es necesario hacer una restricción del dominio de la función, para que las funciones inversas cumplan con la definición de función:

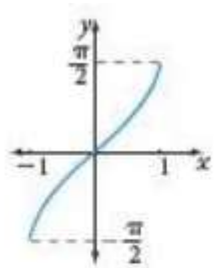
Función Arcoseno

Los símbolos $sen^{-1}x$ y $arcsenx$, se leen respectivamente**,** seno inverso de x y arcoseno de x y se utilizan y se utilizan para expresar la inversa de la función inversa.



Restricción del dominio de $f(x) = \text{sen } x$

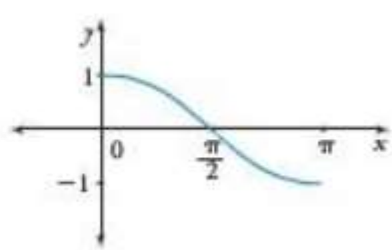
$y = \text{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \text{sen } y$, donde $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y $x \in [-1, 1]$.



$f^{-1}(x) = \text{sen}^{-1} x$

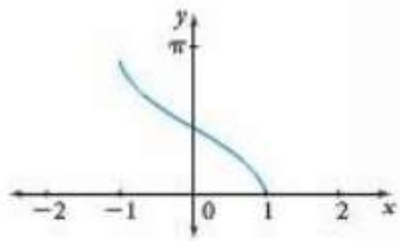
Función Arcocoseno

Los símbolos $cos^{-1}x$ y $arccosx$, se leen respectivamente**,** coseno inverso de x y arcocoseno de x y se utilizan y se utilizan para expresar la inversa de la función inversa.



Restricción del dominio de $f(x) = \cos x$

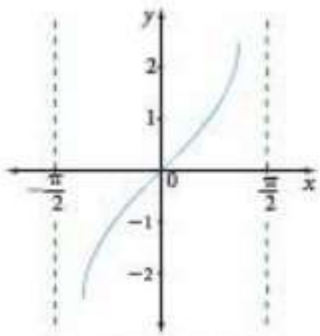
$y = \cos^{-1} x$ si y sólo si $x = \cos y$, donde $y \in [0, \pi]$ y $x \in [-1, 1]$.



$f^{-1}(x) = \cos^{-1} x$

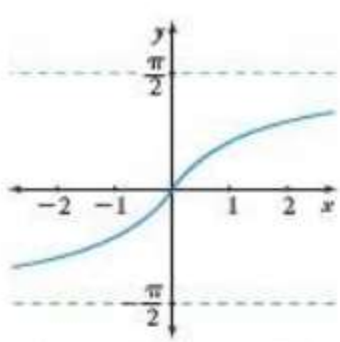
Función Arcotangente

Los símbolos $tan^{-1}x$ y $arctanx$, se leen respectivamente**,** tangente inverso de x y arcotangente de x y se utilizan y se utilizan para expresar la inversa de la función inversa.



Restricción de dominio de $f(x) = \tan x$

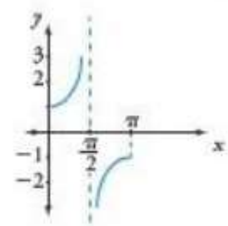
$y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, donde $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ y $x \in \mathbb{R}$.



$y = \tan^{-1}(x) = \arctan x$

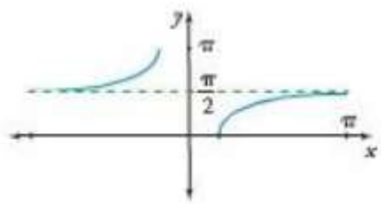
Función Arcosecante

Los símbolos $sec^{-1}x$ y $arcsecx$, se leen respectivamente**,** secante inverso de x y arcosecante de x y se utilizan y se utilizan para expresar la inversa de la función inversa.



Restricción de dominio
de $y = \sec x$

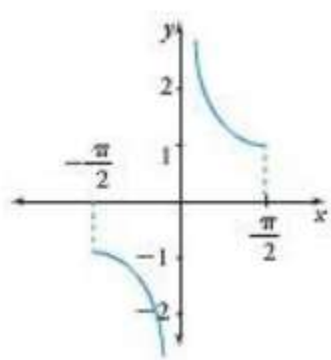
$y = \sec^{-1} x$ si y sólo si $x = \sec y$, donde $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ y $x \leq -1$ o $x \geq 1$.



$y = \sec^{-1} x = \text{arcsec}\, x$

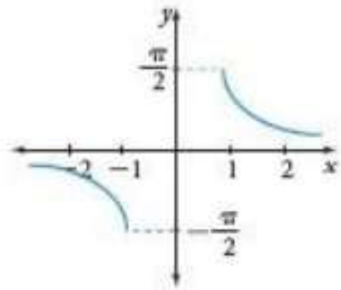
Función Arcocosecante

Los símbolos $csc^{-1}x$ y $arccscx$, se leen respectivamente**,** cosecante inverso de x y arcocosecante de x y se utilizan y se utilizan para expresar la inversa de la función inversa.



Restricción de dominio
de $f(x) = \csc x$

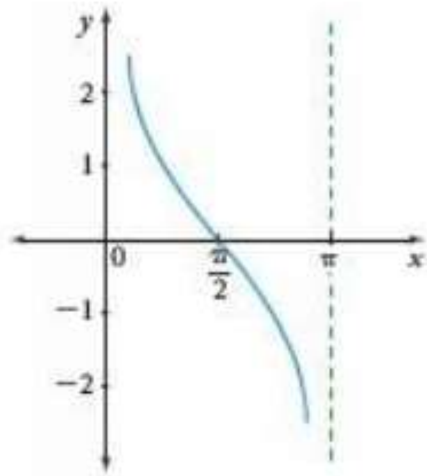
$$y = \csc^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \csc y, \text{ donde } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ y } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1$$



$y = \csc^{-1} x = \text{arccsc}\, x$

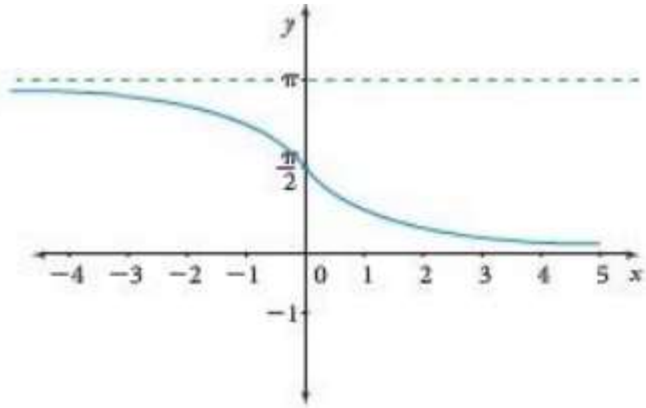
Función Arcocotangente

Los símbolos $tan^{-1}x$ y $arctanx$, se leen respectivamente**,** cotangente inverso de x y arcocosecante de x y se utilizan y se utilizan para expresar la inversa de la función inversa.



Restricción de dominio
de $f(x) = \cot x$

$$y = \csc^{-1} x \text{ si y sólo si } x = \csc y, \text{ donde } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ y } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1$$



$y = \cot^{-1}(x) = \operatorname{arccot} x$

EJEMPLOS

1. Determinar el valor exacto de cada expresión.

a. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Como $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces, $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

b. $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

Primero, se halla $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$, así:

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, entonces, $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Luego, $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por tanto, $\cos\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Hallar x en $\arctan(\tan(2x)) = \arctan 1$.

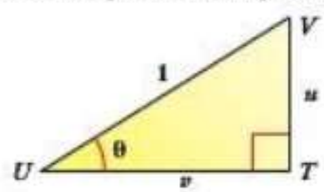
Como $\arctan(\tan(x)) = x$, entonces, $2x = \arctan(1)$.

Además, como $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ implica que $2x = \frac{\pi}{4}$.

Luego, $x = \frac{\pi}{8}$.

3. Si $\operatorname{sen}\theta = u$ con θ ángulo agudo, determinar $\tan\theta$ en términos de u.

Puesto que $\operatorname{sen}\theta = u$, se tiene que $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{1}\right)$. Así, se puede construir el siguiente triángulo rectángulo.



1 es la hipotenusa del triángulo rectángulo y u es el cateto opuesto al ángulo θ.

Luego, se halla el adyacente para θ, es decir, v. Así:

$u^2 + v^2 = 1^2$ Se aplica el teorema de Pitágoras.

$v = \sqrt{1 - u^2}$ Se despeja v.

Como la función tangente se define como:

$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$, entonces, se tiene que:

$\tan\theta = \frac{u}{v} = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$

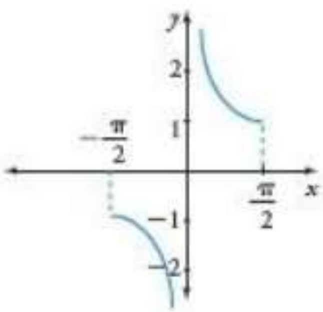
Completa cada espacio. Luego, resuelve.

107. La inversa de la función cosecante se puede definir a partir de la restricción del dominio de la función $y = \csc x$ al intervalo ______________.

108. La notación de la función arcocosecante de x o cosecante inversa de x es ______________ o ______________.

109. La inversa de la función cosecante se define como ______________.

110. Realiza la gráfica de la función inversa de la función cosecante si su gráfica es:



Asocia cada expresión con su respectivo valor.

111. $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ — **a.** 1

112. $\cot\left(\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ — **b.** $-\frac{13}{5}$

113. $\csc\left(\arctan\left(-\frac{5}{12}\right)\right)$ — **c.** $-\sqrt{3}$

114. $\tan\left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ — **d.** $\frac{5}{3}$

115. $\sec\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ — **e.** $\frac{\pi}{6}$

Escribe, en cada caso, la expresión que genera la secuencia digitada en la calculadora (la secuencia puede variar según la calculadora).

116. [1] [+] [(] [cos] [(] [SHIFT] [tan] [(] [3] [×] [8] [)] [)] [)] [exe]

117. [sen] [(] [SHIFT] [sen] [(] [5] [÷] [12] [)] [−] [SHIFT] [tan] [(] [5] [+] [5] [)] [)] [exe]

118. [SHIFT] [tan] [(] [1] [)] [−] [SHIFT] [cos] [(] [SHIFT] [√] [2] [÷] [2] [)] [exe]

Verifica si cada afirmación es correcta o no. Justifica tu respuesta, corrigiéndola con el valor exacto.

119. $\tan\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 1$

120. $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 30°$

121. $\arctan\left(\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}$

122. $\arctan\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{2}{3}$

123. $\arccos\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = -1$

Utiliza un triángulo rectángulo en cada caso, para determinar el valor de las siguientes expresiones.

124. $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$

125. $\tan\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$

126. $\operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right)\right)$

127. $\cos(\arctan(5))$

128. $\sec\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

129. $\csc\left(\arccos\left(\frac{7}{25}\right)\right)$

130. Explica por qué $\cos(\cos^{-1} x) = \cos^{-1}(\cos x)$ no siempre es verdadera.

Lee y resuelve.

Las curvas que toman los automóviles en las carreteras se pueden modelar por la expresión $\tan\theta = \frac{v^2}{gr}$, donde v es la velocidad del carro en la curva, g es la aceleración de la gravedad, r es el radio de la curva y θ es el ángulo que barre el carro al dar la curva.

131. Se desea diseñar una curva que tenga un radio de 300 metros. Si el límite de velocidad en esta curva es 50 km/h y la aceleración de la gravedad 9,8 m/s^2, ¿qué ángulo debe tener la curva en su orilla?

SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

La solución de triángulos ha sido utilizada desde la antigüedad en áreas como la astronomía, la navegación y la geodesia, para hacer mediciones de distancias inaccesibles como la distancia de la Tierra a la Luna y la medida del radio del Sol, entre otras.

Resolver un triángulo rectángulo consiste en determinar la medida de sus tres lados y de sus tres ángulos.

La resolución de un triángulo se realiza teniendo en cuenta que tipo de triángulo es y las medidas que se conocen. En particular, para resolver un triángulo rectángulo se presentan dos casos:

Caso 1: Se conocen las medidas de uno de sus lados y de un ángulo agudo.

Caso 2: Se conocen las medidas de dos lados.

SOLUCIÓN DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

CASO 1: CUANDO SE CONOCEN LA MEDIDA DE UN LADO Y UN ÁNGULO.

En este caso se plantea una ecuación a partir de las razones trigonométricas que la relacione la incógnita (medida desconocida) con la medida del lado y del ángulo que se conocen. La razón trigonométrica que se aplique depende de la medida del lado que se conoce, el cual puede ser uno de los catetos o la hipotenusa.

CASO 2: CUANDO SE CONOCEN LAS MEDIDAS DE DOS LADOS

En este caso se aplican las funciones trigonométricas inversas para determinar el valor de los ángulos desconocidos. La medida del tercer lado se puede calcular mediante el teorema de Pitágoras.

EJEMPLOS

1. **Para realizar el transporte de cierta mercancía se utiliza una rampa de 6 m como se muestra en la figura. Calcular la medida del ángulo que forma la rampa con el suelo.**

Se realizan los siguientes pasos:

$\cos \alpha = \frac{4}{6}$ Se aplica la función coseno.

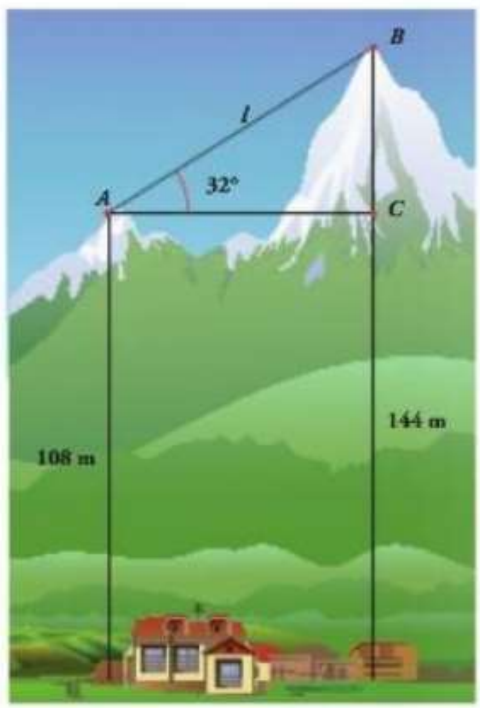
$\cos \alpha = 0{,}66$ Se divide.

$\alpha = \arccos\left(\frac{4}{6}\right) \approx 48{,}2°$ Se aplica la función inversa de coseno y se aproxima la medida del ángulo.

Por tanto, el ángulo que forma la rampa con el suelo mide aproximadamente 48,2°.

2. **Se quiere instalar un teleférico entre los puntos A y B más altos de dos montañas de 108 m y 144 m de altura, respectivamente. Para calcular la longitud del cable necesario para unir ambos puntos, un ingeniero mide el ángulo que forma el segmento AB con la horizontal, obteniendo una medida de 32°. Calcular la longitud de uno de los cables necesarios para la instalación del teleférico.**

Primero, se realiza un dibujo de la situación ubicando las medidas dadas y la incógnita, como se muestra en la imagen de la derecha.



Segundo, se restan las alturas de las montañas para determinar el cateto opuesto al ángulo de 32°. Así, se tiene que $BC = 144 - 108 = 36$.

Luego, se aplica la función seno que relaciona el cateto opuesto $BC = 36$, con la hipotenusa, que en este caso corresponde a la longitud l del cable.

$\operatorname{sen} 32° = \frac{36}{l}$ Se aplica la función seno.

$l = \frac{36}{\operatorname{sen} 32°}$ Se despeja l.

$l \approx 68$ Se aproxima la medida de l.

Finalmente, se tiene que la longitud de uno de los cables necesarios para la instalación del teleférico mide aproximadamente 68 m.

3. Un barco pesquero lanza un ancla a un río en un punto A. Como la profundidad del río es menor que la longitud de la cuerda que soporta el ancla, el barco se desplaza 20 m como se muestra en la figura 3. Si sen $\alpha = \frac{5}{13}$, calcula la profundidad del río en ese punto y la distancia del barco hasta la punta del ancla.

Primero, se calcula la medida del ángulo α.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{5}{13}$ Se escribe el valor de sen α.

$\alpha = \text{sen}^{-1}\frac{5}{13} \approx 22{,}62°$ Se aplica la función inversa de seno y se aproxima la medida de α.

Luego, se calcula la profundidad p del río.

$\tan(22{,}62°) = \frac{p}{20}$ Se relacionan las medidas de los catetos mediante la función tangente.

$p = 20\tan(22{,}62°)$ Se despeja p.

$p \approx 8{,}33$ m Se aproxima la medida de p.

Finalmente, se calcula la distancia del barco hasta la punta del ancla, aplicando el teorema de Pitágoras, así:

$$d = \sqrt{(20)^2 + (8,33)^2} \approx 21,66$$

Por tanto, la profundidad del río en el punto A es de aproximadamente 8,33 m y la distancia del barco hasta la punta del ancla es de 21,66 m.

ANGULO DE ELEVACIÓN Y ÁNGULO DE DEPRESIÓN

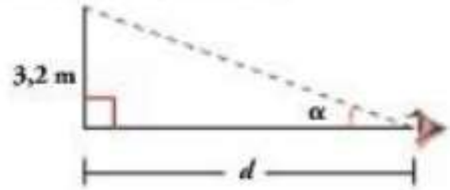
Cuando se observa un objeto, la semirrecta imaginaria cuyo punto de origen corresponde a los ojos del observador y que pasa por el objeto, se denomina **línea visual.** Además si se considera la línea horizontal como una semirrecta cuyo sentido se orienta hacia el objeto y su origen corresponde a los ojos del observador, entonces se pueden definir los siguientes ángulos que dependen de la ubicación del objeto:

- **Ángulo de elevación:** Es aquel que se forma entre la línea visual y la horizontal cuando el objeto está por encima de la horizontal.
- **Ángulo de depresión:** Aquel que se forma entre la línea visual y la horizontal cuando el objeto está por debajo de la horizontal.

EJEMPLOS

1. En un teatro los ojos de un observador se ubican a la misma altura de la base de la pantalla. Además, si el observador mira la parte superior de la pantalla se forma un ángulo de elevación α. Teniendo en cuenta que $\cos \alpha = \frac{15}{17}$ y que la altura de la pantalla es 3,2 m, ¿a qué distancia está el observador de la pantalla?

Primero, se realiza un dibujo de la situación en el que se ubican los datos dados y la incógnita.



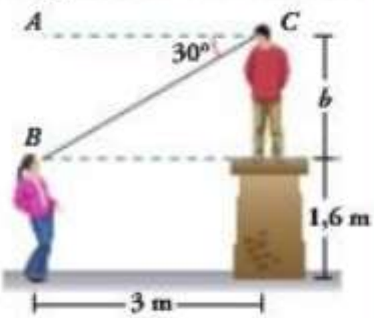
Luego, se calcula el ángulo de elevación α.

$\cos \alpha = \frac{15}{17}$ Se escribe el valor de cos α.

$\alpha = \cos^{-1} \frac{15}{17} \approx 28°$ Se aplica la función inversa de coseno y se aproxima la medida del ángulo de elevación.

Finalmente, se aplica la función tangente para calcular d, así: $d = \frac{3,2}{\tan 28°} \approx 6$. Por tanto, el observador está a 6 m de la pantalla.

2. David se sube en un pedestal de 1,6 m de altura y desde allí observa a María con un ángulo de depresión de 30°, como se muestra en la figura. Si la altura del pedestal es igual a la estatura de María y ella está a 3 m del pedestal, ¿qué altura alcanza David con respecto al suelo?



Primero, se realiza un dibujo que represente la situación.

Segundo, se calcula la estatura de David. Como $\overline{AB}$ es el lado opuesto al ángulo de depresión y $AC = 3$ m, entonces, se tiene que:

$\tan 30° = \frac{b}{3}$ Se aplica la función tangente.

$b = 3 \tan 30° \approx 1,73$ Se despeja y se aproxima el valor de b.

Luego, se suma la estatura de David con la altura del pedestal para hallar la altura h que alcanza David con respecto al suelo.

$h = 1,73 + 1,6 = 3,33$

Finalmente, se tiene que David alcanza una altura de 3,33 m con respecto al suelo.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto • Argumento • Propongo • Ejercito • Razono • Soluciono problemas

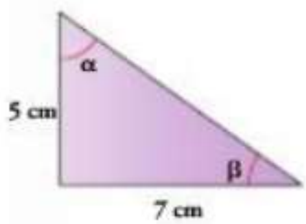
Responde.

1. Si en un triángulo *ABC* rectángulo se conoce la medida del ∢*B* agudo y de su lado opuesto *b*, ¿cuál función trigonométrica debe aplicarse para hallar la medida de la hipotenusa?

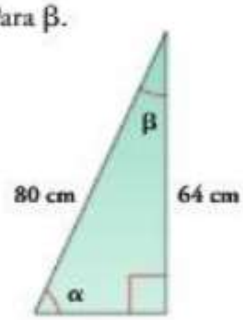
2. Si *AB* es la horizontal con respecto a los ojos de un observador y *C* es el punto en el que se ubica un objeto, ¿dónde debe ubicarse el punto *C* para que el ∢*CAB* sea un ángulo de depresión?

Halla el valor de las razones trigonométricas para el ángulo indicado en cada triángulo rectángulo.

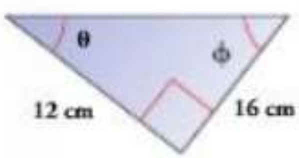
3. Para α.



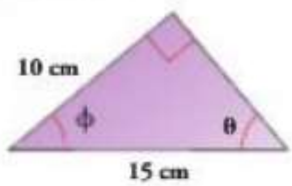
5. Para β.



4. Para ϕ.

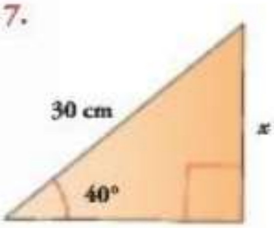


6. Para θ.

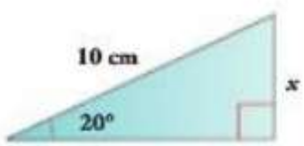


Calcula el valor de *x* en cada triángulo rectángulo.

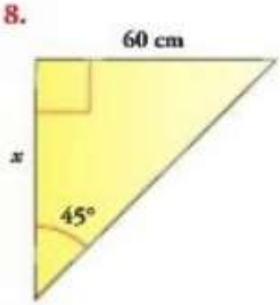
7.



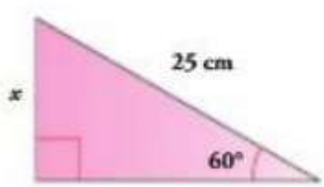
9.



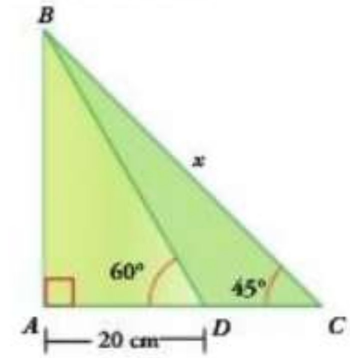
8.



10.



11. **Explica paso a paso cómo encontrar el valor de *x* en la siguiente figura.**



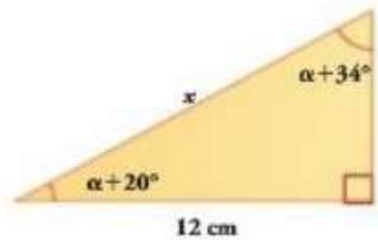
Resuelve.

12. Calcula la medida de cos α y tan α, si α es un ángulo agudo y sen α = 0,6.

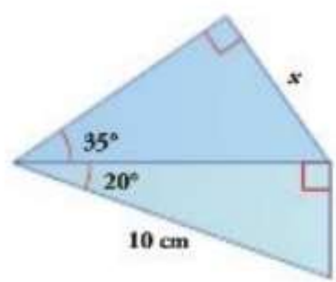
13. Calcula la medida de sen β y cos β, si β es un ángulo agudo y tan β = 3.

Determina el valor de *x* en cada caso.

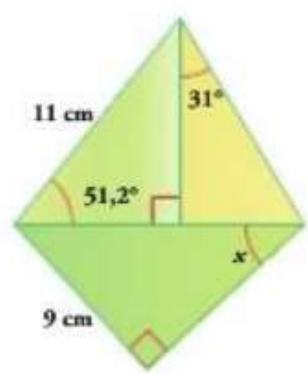
14.



15.



16.



SOLUCIÓN DE TRIANGULOS NO RECTANGULOS

Cuando un triángulo no es rectángulo, entonces es acutángulo u obtusángulo. Este tipo de triángulos se resuelven teniendo en cuenta las medidas que se conocen del triángulo, según los siguientes casos:

CASO 1: Se conoce un lado y dos ángulos $(LAA\ o\ ALA)$.

CASO 2: Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA).

CASO 3: Se conocen los tres lados del triangulo (LLL).

CASO 4: Se conocen dos lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos (LAL).

Los triángulos que corresponden a los casos 1 y 2 se resuelven mediante la ley de senos. En cambio, los triángulos que pertenecen a los casos 3 y 4 se resuelven mediante la ley de cosenos. Es importante tener en cuenta que cuando se aplica la ley de senos en el caso 2 el problema puede tener única solución, dos soluciones o no tener solución.

Ley de Senos

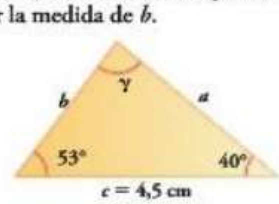
Dado un triángulo de lados a, b y c cuyos ángulos opuestos son α, β y θ , respectivamente, se cumple que:

Dado un triángulo de lados *a*, *b* y *c* cuyos ángulos opuestos son α, β y γ, respectivamente, se cumple que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

EJEMPLOS

1. **Aplica la ley de senos en el siguiente triángulo para calcular la medida de *b*.**



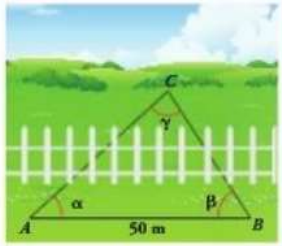
Primero, se calcula la medida del ángulo γ. Como $\gamma + 53° + 40° = 180°$, entonces, se tiene que $\gamma = 87°$.

Luego, se aplica la ley de senos, así:

$$\frac{\operatorname{sen} 40°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 87°}{4,5} \text{ de donde } b = \frac{4,5(\operatorname{sen} 40°)}{\operatorname{sen} 87°}$$

Finalmente, se simplifica y se obtiene que la medida de *b* es aproximadamente 2,9 cm.

2. **Un granjero quiere medir la distancia desde un punto A ubicado en su granja hasta un punto C ubicado en una propiedad vecina, sin pasar la cerca que se muestra en la figura. Calcular AC si $\alpha = 45°$ y $\beta = 60°$.**



Este problema corresponde al caso 1 (*ALA*) y se resuelve aplicando la ley de senos así:

Primero, se calcula la medida del ángulo γ.

$\gamma + \alpha + \beta = 180°$ Se establece la suma de las medidas de los ángulos.

$\gamma + 45° + 60° = 180°$ Se remplazan los valores de α y de β.

$\gamma = 75°$ Se despeja γ.

Luego, se calcula AC.

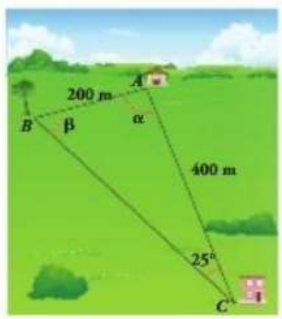
$\frac{\text{sen } 60°}{AC} = \frac{\text{sen } 75°}{50}$ Se plantea la ley de senos.

$AC = \frac{50(\text{sen } 60°)}{\text{sen } 75°}$ Se despeja AC.

$AC \approx 44{,}83$ Se resuelve la operación.

Finalmente, se tiene que la distancia entre el punto A y el punto C es de 44,83 m.

3. **La distancia entre dos casas ubicadas en los puntos A y C, es de 400 m como se muestra en la figura. Si la distancia entre la casa del punto A y un árbol ubicado en un punto B, es de 200 m, ¿cuál es la distancia entre la casa del punto C y el árbol?**



Este problema corresponde al caso 2 (*LLA*) y se resuelve aplicando la ley de senos, así:

Primero, se calcula la medida del ángulo agudo β.

$\frac{\text{sen } \beta}{400} = \frac{\text{sen } 25°}{200}$ Se establece la ley de senos.

$\text{sen } \beta = \frac{400(\text{sen } 25°)}{200}$ Se despeja sen β.

$\text{sen } \beta \approx 0{,}845$ Se resuelve.

$\beta = \text{arcsen } 0{,}845$ Se aplica la función inversa de seno.

$\beta \approx 57{,}7°$ Se aproxima la medida del ángulo.

Luego, se tiene que la medida del ángulo α es aproximadamente 97,3°.

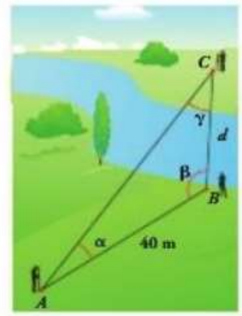
Finalmente, se calcula la medida de $\overline{BC}$.

$\frac{\text{sen } 97{,}3°}{BC} = \frac{\text{sen } 25°}{200}$ Se aplica ley de senos.

$BC = \frac{200(\text{sen } 97{,}3°)}{\text{sen } 25°} \approx 469{,}4$ Se despeja BC y se resuelve.

Por tanto, la distancia de la casa del punto C hasta el árbol es de 469,4 metros.

4. **Tres topógrafos quieren medir el ancho de una quebrada. Para esto, ubican dos puntos A y B, y miden la distancia entre ellos. Luego, utilizan un teodolito para medir los ángulos de elevación α y β con respecto a un punto C, como se muestra en la figura. Si $\alpha = 50°$ y $\beta = 117°$, ¿cuál es el ancho de la quebrada?**



Primero, se calcula la medida del ángulo opuesto al lado $AB = 40$.

$\gamma + 50° + 117° = 180°$ Se remplazan los valores de α y de β.

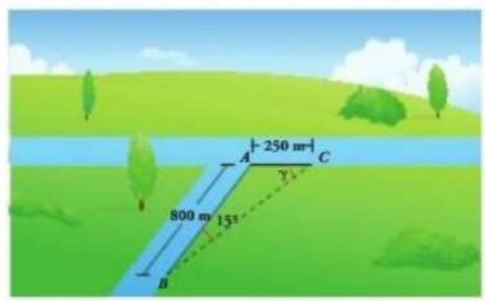
$\gamma = 13°$ Se halla γ.

Luego, se aplica la ley de senos.

$\frac{\text{sen } 13°}{40} = \frac{\text{sen } 50°}{BC}$ de donde $BC = \frac{40(\text{sen } 50°)}{\text{sen } 13°} \cong 136{,}2$ metros

Finalmente, el ancho de la quebrada es aproximadamente 136,2 metros.

5. **Un ingeniero debe construir un canal entre los puntos B y C de dos ríos. Para esto, el ingeniero representa ambos ríos con líneas rectas y escribe las medidas que conoce, como se muestra en la figura. ¿Cuál será la longitud del canal?**



Primero, se plantea la ley de senos para calcular la medida del $\measuredangle C$ agudo, cuya medida se representa con la letra γ.

$\frac{\text{sen } 15°}{250} = \frac{\text{sen } \gamma}{800}$ Se establece la ley de senos.

$\text{sen } \gamma = \frac{800(\text{sen } 15°)}{250} \approx 0{,}83$ Se despeja sen γ y se aproxima el valor de sen γ.

$\gamma = \text{arcsen } 0{,}83 = 56°$ Se aplica la función inversa de seno y se aproxima la medida del ángulo γ.

Luego, se calcula la medida del $\measuredangle A$. Así: $\measuredangle A = 180° - 56° - 15° = 109°$

Finalmente, se calcula la medida de BC, así:

$\frac{\text{sen } 15°}{250} = \frac{\text{sen } 109°}{BC}$ Se plantea ley de senos.

$BC = \frac{250(\text{sen } 109°)}{\text{sen } 15°} \approx 913{,}3$ Se despeja y se aproxima el valor de BC.

Por tanto, la longitud del canal que conecta ambos ríos será de 913,3 metros.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Escribe V, si la proposición es verdadera o F, si es falsa. Justifica tu respuesta.

26. La ley de senos solo se puede aplicar en triángulos no rectángulos. ( )

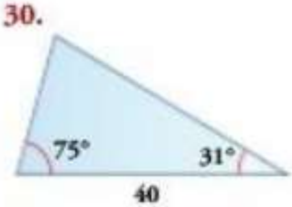
27. Si los lados de un triángulo son a, b y c y los ángulos opuestos son α, β y γ, respectivamente, entonces se cumple que $a \cdot \operatorname{sen} \alpha = b \cdot \operatorname{sen} \beta$. ( )

28. La razón trigonométrica seno, en un triángulo rectángulo, es un caso particular de la ley de senos. ( )

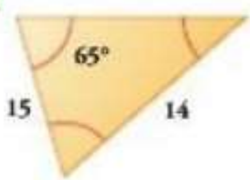
29. Si los ángulos α y β de un triángulo son complementarios, y a, b son los lados opuestos respectivamente, entonces se cumple que:
$b \cdot \cos \beta = a \cdot \operatorname{sen} \beta$. ( )

Resuelve los siguientes triángulos.

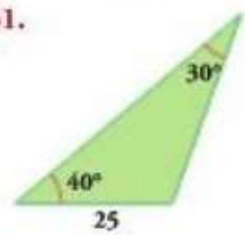
30.



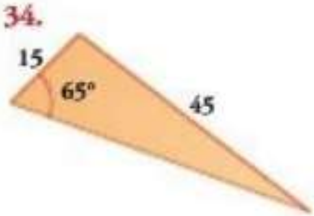
33.



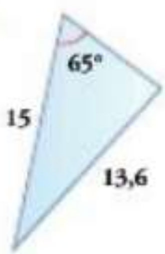
31.



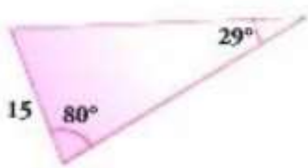
34.



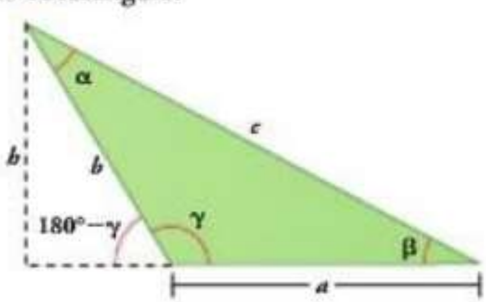
32.



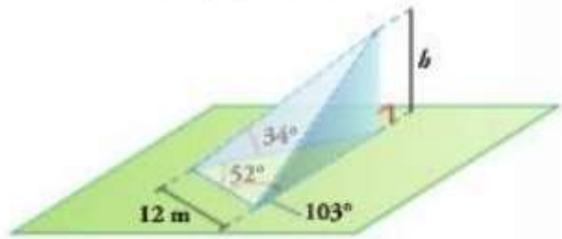
35.



36. Demuestra la ley de senos para el siguiente triángulo obtusángulo.



El volumen V de la pirámide triangular recta que se muestra en la siguiente figura, está dado por la expresión $V = \frac{1}{3}Bh$, donde B es el área de la base y h es la altura de la pirámide.



37. Halla la altura de la pirámide.

38. Calcula el volumen de la pirámide.

Resuelve los siguientes problemas.

39. Un helicóptero busca aterrizar en medio de dos casas que se encuentran separadas 200 m. Si se mide el ángulo de elevación desde cada casa hasta el punto P en el que se ubica el helicóptero en un instante dado, se obtienen las medidas 30° y 45°. ¿A qué altura se encuentra el helicóptero en ese momento?

40. En un automóvil, la manivela del cigüeñal tiene 8 cm de longitud y la biela tiene 23 cm. Cuando el ángulo OPA es de 15°, ¿qué tan lejos está el pistón P del centro O del cigüeñal?

41. Inventa un problema que se resuelva con la ley de senos, y que se relacione con la siguiente información. Luego, resuélvelo.

Un satélite meteorológico que orbita el Ecuador a una altura $A = 36.000$ km, detecta una tormenta eléctrica al norte, en P, a un ángulo $\theta = 6{,}5°$ de su vertical.

El radio R de la Tierra mide 6.378 km.

Ley de Coseno

En todo triangulo, el cuadrado de la longitud de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros lados, menos dos veces el producto de estas longitudes por el coseno del ángulo comprendido entre ellos. Es decir dado $\Delta\, ABC$, se cumple que:

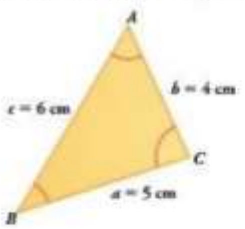
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCosA$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCosB$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosC$$

EJEMPLOS

1. **Resolver el $\triangle ABC$ en el cual $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 6$ cm.**



Primero, se halla la medida del ángulo A aplicando la ley del coseno, así:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	Se plantea la fórmula para a.
$5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos A$	Se remplazan los valores de a, b y c.
$25 = 16 + 36 - 48 \cos A$	Se resuelven las potencias y los productos.
$25 = 52 - 48 \cos A$	Se suma.
$\cos A = \frac{52 - 25}{48}$	Se despeja cos A.
$\cos A = 0{,}5625$	Se resuelven las operaciones.
$A = \cos^{-1}(0{,}5625) \approx 55{,}77°$	Se despeja y se halla A.

Por tanto, la medida del ángulo A es 55,77°.

Luego, se halla la medida del ángulo B, aplicando la ley del coseno, aunque es posible determinarla mediante el uso de la ley del seno.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$	Se plantea la fórmula para b.
$4^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos B$	Se remplazan los valores de a, b y c.
$16 = 25 + 36 - 60 \cos B$	Se resuelven las potencias y los productos.
$16 = 61 - 60 \cos B$	Se suma.
$\cos B = \frac{61 - 16}{60}$	Se despeja cos B.
$\cos B = 0{,}75$	Se resuelven las operaciones.
$B = \cos^{-1}(0{,}75) \approx 41{,}41°$	Se despeja y se halla B.

Por tanto, la medida del ángulo B es 41,41°.

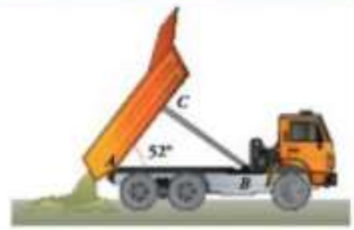
Por último, se determina la medida del ángulo C, como sigue:

$A + B + C = 180°$	Se plantea propiedad de los triángulos.
$55{,}77° + 41{,}41° + C = 180°$	Se remplazan las medidas de los ángulos A y B.
$97{,}18° + C = 180°$	Se suma.
$C = 180° - 97{,}18°$	Se despeja C.
$C = 82{,}82°$	Se halla C.

Por tanto, la solución del $\triangle ABC$ es: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $c = 6$ cm y $A = 55{,}77°$, $B = 41{,}41°$ y $C = 82{,}82°$.

2. **Leer, observar y responder.**

En el camión que aparece en la figura, $AB = 3$ m y $AC = 2{,}7$ m. Si para descargar el camión se debe tener una inclinación de 52°, ¿cuál debe ser la distancia de B a C, para obtener esta inclinación?



Primero, se identifican los datos.

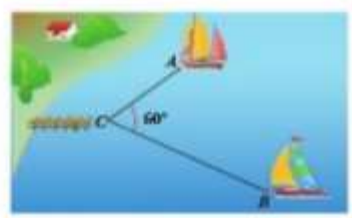
$AB = c = 3$ m, $AC = b = 2{,}7$ m, $A = 52°$ y $BC = a$

Luego, para determinar la distancia entre B y C, se aplica la ley del coseno, así:

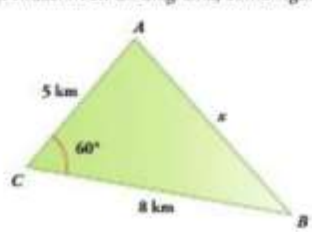
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	Se plantea la ley del coseno para a.
$a^2 = 2{,}7^2 + 3^2 - 2 \cdot 2{,}7 \cdot 3 \cos 52°$	Se remplazan los valores de b, c y A.
$a^2 = 7{,}3 + 9 - 16{,}2 \cos 52°$	Se resuelven las potencias y los productos.
$a^2 = 16{,}3 - 16{,}2 \cdot (0{,}6)$	Se suma y se calcula cos 52°.
$a^2 = 6{,}3$	Se simplifica.
$a = 2{,}5$	Se extrae raíz cuadrada.

Por tanto, la distancia entre B y C, debe ser 2,5 m.

3. **Resolver. Dos barcos, A y B, están anclados cerca un muelle. Desde el punto C del muelle se observan los dos barcos de modo que la medida del ángulo ACB es 60°, la distancia del barco A al punto de referencia es 5 km y la distancia del barco B a este mismo punto es de 8 km. Calcular la distancia entre los barcos.**



Primero, se representa la situación en un diagrama, como sigue:



Luego, por la ley del coseno, se tiene:

$x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60°$	Se remplazan los valores.
$x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$	Se resuelven las operaciones y se calcula cos 60°.
$x^2 = 49$	Se simplifica.
$x = 7$	Se extrae raíz cuadrada.

Por tanto, la distancia entre los barcos es de 7 km.

Afianzo COMPETENCIAS

Interpreto · Argumento · Propongo · Ejercito · Razono · Soluciono problemas

Responde.

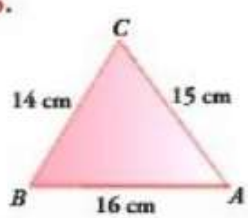
42. ¿Por qué se necesita la ley del coseno para resolver triángulos? Explica los casos.

43. ¿Cómo se aplica la ley del coseno en un triángulo rectángulo?

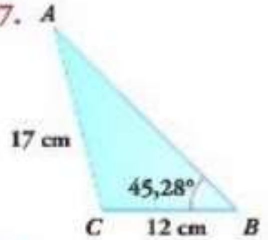
44. ¿Qué propiedad se aplica en la demostración de la ley del coseno cuando el ángulo es mayor de 90°?

Resuelve los siguientes triángulos.

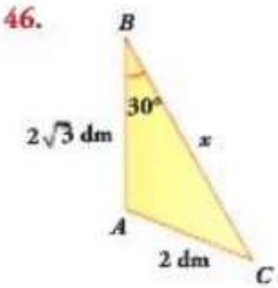
45.



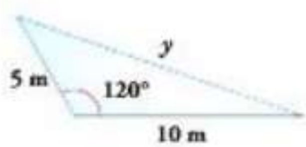
47.



46.

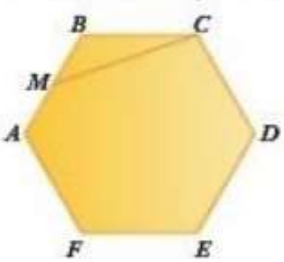


48.

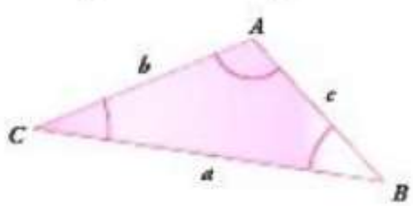


La siguiente figura representa un hexágono regular *ABCDEF* con 6 cm de lado, donde *M* es el punto medio del lado $\overline{AB}$.

49. Calcula la medida del segmento $\overline{MC}$.



50. Utiliza la ley de los cosenos para demostrar que:



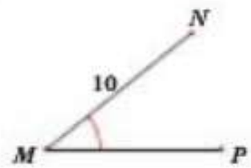
$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}$$

51. Realiza la figura y resuelve.

Los dos lados consecutivos de un paralelogramo miden 5 cm y 10 cm, respectivamente, y forman un ángulo entre sí de 120°. Calcula las medidas de las diagonales del paralelogramo.

52. Lee y completa la siguiente información de manera que quede planteada una situación que se pueda resolver por la ley del coseno. Luego, formula la pregunta que corresponda y respóndela.

El esquema muestra la posición de las ciudades *M*, *N* y *P*.

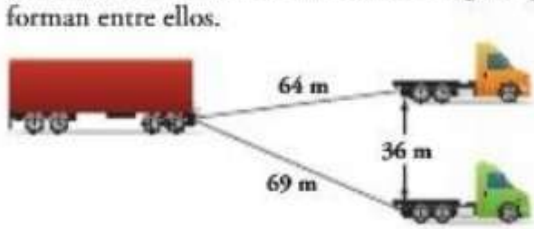


Lee y resuelve.

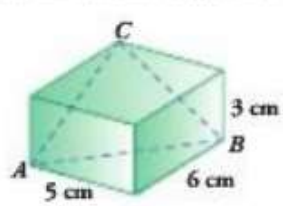
53. En una construcción, dos vigas de 10 m están soldadas por sus extremos y forman un triángulo con otra viga de 15 m. Halla los ángulos que forman las vigas entre sí.

54. Tres pueblos *A*, *B* y *C* están unidos por carreteras rectas y planas. Las distancias entre *A* y *B* es de 6 km, entre *B* y *C* es de 9 km. El ángulo formado por ambas carreteras es 120°. ¿Cuál es la distancia entre *A* y *C*?

55. Dos remolques que están separados por 36 metros tiran de un contenedor, como se muestra en la figura. Si la longitud de uno de los cables es 64 m y la del otro es de 69 m, determina el ángulo que forman entre ellos.



56. Un sólido rectangular tiene lados como se indica en la figura. Encuentra m∢*CAB*.



MEDIDAS DE POSICIÓN Y VARIABILIDAD EN UN CONJUNTO DE DATOS

INTRODUCCIÓN

Se presentan varias medidas numéricas que proporcionan otras opciones para resumir datos. Hay medidas numéricas para conjuntos de datos que constan de una sola variable, igualmente hay medidas numéricas de localización, dispersión, forma, y asociación. Si estas medidas las calcula con los datos de una muestra, se llaman estadísticos muestrales. Si estas medidas las calcula con los datos de una población se llaman parámetros poblacionales. En inferencia estadística, al estadístico muestral se le conoce como el estimador puntual del correspondiente parámetro poblacional.

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media

La medida de localización más importante es la media, o valor promedio, de una variable. La media proporciona una medida de localización central de los datos. Si los datos son datos de una muestra, la media se denota $\bar{x}$; si los datos son datos de una población, la media se denota con la letra griega μ.

En las fórmulas estadísticas se acostumbra denotar el valor de la primera observación de la variable x con x_1, el valor de la segunda observación de la variable x con x_2 y así con lo siguiente. En general, el valor de la i-ésima observación de la variable x se denota x_i. La fórmula para la media muestral cuando se tiene una muestra de n observaciones es la siguiente. A continuación se presenta la fórmula.

MEDIA MUESTRAL

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

En la fórmula anterior el numerador es la suma de los valores de las n observaciones. Es decir:

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

La letra griega Σ es el símbolo de sumatoria (suma).

Para ilustrar el cálculo de la media muestral, considere los siguientes datos que representan el tamaño de cinco grupos de una universidad.

$$46 \quad 54 \quad 42 \quad 46 \quad 32$$

Se emplea la notación $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5$ para representar el número de estudiantes en cada uno de los cinco grupos.

$$x_1 = 46 \qquad x_2 = 54 \qquad x_3 = 42 \qquad x_4 = 46 \qquad x_5 = 32$$

Por tanto, para calcular la media muestral, escriba

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} = \frac{46 + 54 + 42 + 46 + 32}{5} = 44$$

La media muestral del tamaño de estos grupos es 44 alumnos.

Otra ilustración del cálculo de la media muestral aparece en la situación siguiente. Suponga que la bolsa de trabajo de una universidad envía cuestionarios a los recién egresados de la carrera de administración solicitándoles información sobre sus sueldos mensuales iniciales. En la siguiente tabla se presentan estos datos. El sueldo mensual inicial medio de los 12 recién egresados se calcula como sigue.

__TABLA 1.__ SUELDOS MENSUALES INICIALES EN UNA MUESTRA DE 12 RECIÉN EGRESADOS DE LA CARRERA DE ADMINISTRACIÓN

Egresado	Sueldo mensual inicial ($)	Egresado	Sueldo mensual inicial ($)
1	3450	7	3490
2	3550	8	3730
3	3650	9	3540
4	3480	10	3925
5	3355	11	3520
6	3310	12	3480

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}}{12}$$
$$= \frac{3450 + 3550 + \cdots + 3480}{12}$$
$$= \frac{42\,480}{12} = 3540$$

En la ecuación se muestra cómo se calcula la media en una muestra de n observaciones. Para calcular la media de una población use la misma fórmula, pero con una notación diferente para indicar que trabaja con toda la población. El número de observaciones en una población se denota N y el símbolo para la media poblacional es μ.

MEDIA POBLACIONAL

$$\mu = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

MEDIANA

La mediana es otra medida de localización central. Es el valor de en medio en los datos ordenados de menor a mayor (en forma ascendente). Cuando tiene un número impar de observaciones, la mediana es el valor de en medio. Cuando la cantidad de observaciones es par, no hay un número en medio. En este caso, se sigue una convención y la mediana es definida como el promedio de las dos observaciones de en medio. Por conveniencia, la definición de mediana se replantea así:

MEDIANA

Ordenar los datos de menor a mayor (en forma ascendente).

a. Si el número de observaciones es impar, la mediana es el valor de enmedio.
b. Si el número de observaciones es par, la mediana es el promedio de las dos observaciones de enmedio.

Apliquemos esta definición para calcular la mediana del número de alumnos en un grupo a partir de la muestra de los cinco grupos de universidad. Los datos en orden ascendente son:

32 42 46 46 54

Como $n = 5$ es impar, la mediana es el valor de en medio. De manera que la mediana del tamaño de los grupos es 46. Aun cuando en este conjunto de datos hay dos observaciones cuyo valor es 46, al poner las observaciones en orden ascendente se toman en consideración todas las observaciones.

Suponga que también desea calcular la mediana del salario inicial de los 12 recién egresados de la carrera de administración de la tabla 3.1. Primero ordena los datos de menor a mayor.

$$3310 \quad 3355 \quad 3450 \quad 3480 \quad 3480 \quad \underbrace{3490 \quad 3520}_{\text{Los dos valores de en medio}} \quad 3540 \quad 3550 \quad 3650 \quad 3730 \quad 3925$$

Como $n = 12$ es par, se localizan los dos valores de enmedio: 3490 y 3520. La mediana es el promedio de estos dos valores.

$$\text{Mediana} = \frac{3490 + 3520}{2} = 3505$$

Aunque la media es la medida de localización central más empleada, en algunas situaciones se prefiere la mediana. A la media la influyen datos en extremo pequeños o considerablemente grandes. Por ejemplo, suponga que uno de los recién graduados de la tabla 1 tuviera un salario inicial de $10 000 mensuales (quizá su familia sea la dueña de la empresa). Si reemplaza el mayor sueldo inicial mensual de la tabla 3.1, $3925, por $10000 y vuelve a calcular la media, la media muestral cambia de $3540 a $4046. Sin embargo, la mediana, $3505, permanece igual ya que $3490 y $3520 siguen siendo los dos valores de en medio. Si hay algunos sueldos demasiado altos, la mediana proporciona una medida de tendencia central mejor que la media. Al generalizar lo anterior, es posible decir que cuando los datos contengan valores extremos, es preferible usar a la mediana como medida de localización central.

MODA

La tercera medida de localización es la moda. La moda se define como sigue.

> MODA
>
> La moda es el valor que se presenta con mayor frecuencia.

Para ilustrar cómo identificar a la moda, considere la muestra del tamaño de los cinco grupos de la universidad. El único valor que se presenta más de una vez es el 46. La frecuencia con que se presenta este valor es 2, por lo que es el valor con mayor frecuencia, entonces es la moda. Para ver otro ejemplo, considere la muestra de los sueldos iniciales de los recién egresados de la carrera de administración. El único salario mensual inicial que se presenta más de una vez es $3480. Como este valor tiene la frecuencia mayor, es la moda.

Hay situaciones en que la frecuencia mayor se presenta con dos o más valores distintos. Cuando esto ocurre hay más de una moda. Si los datos contienen más de una moda se dice que los datos son bimodales. Si contienen más de dos modas, son multimodales. En los casos multimodales casi nunca se da la moda, porque dar tres o más modas no resulta de mucha ayuda para describir la localización de los datos.

PERCENTILES

Un percentil aporta información acerca de la dispersión de los datos en el intervalo que va del menor al mayor valor de los datos. En los conjuntos de datos que no tienen muchos valores repetidos, el percentil p divide a los datos en dos partes. Cerca de p por ciento de las observaciones tienen valores menores que el percentil p y aproximadamente $(100 - p)$ por ciento de las observaciones tienen valores mayores que el percentil p. El percentil p se define como sigue:

PERCENTIL

El percentil p es un valor tal que por lo menos p por ciento de las observaciones son menores o iguales que este valor y por lo menos $(100 - p)$ por ciento de las observaciones son mayores o iguales que este valor.

Las puntuaciones en los exámenes de admisión de escuelas y universidades se suelen dar en términos de percentiles. Por ejemplo, suponga que un estudiante obtiene 54 puntos en la parte verbal del examen de admisión. Esto no dice mucho acerca de este estudiante en relación con los demás estudiantes que realizaron el examen. Sin embargo, si esta puntuación corresponde al percentil 70, entonces 70% de los estudiantes obtuvieron una puntuación menor a la de dicho estudiante y 30% de los estudiantes obtuvieron una puntuación mayor.

Para calcular el percentil p se emplea el procedimiento siguiente.

CÁLCULO DEL PERCENTIL p

Paso 1. Ordenar los datos de menor a mayor (colocar los datos en orden ascendente).
Paso 2. Calcular el índice i

$$i = \left(\frac{p}{100}\right)n$$

donde p es el percentil deseado y n es el número de observaciones.
Paso 3. (a) Si *i no es un número entero, debe redondearlo.* El primer entero mayor que i denota la posición del percentil p.
(b) Si *i es un número entero,* el percentil p es el promedio de los valores en las posiciones i e $i + 1$.

Para ilustrar el empleo de este procedimiento, determine el percentil 85 en los sueldos mensuales iniciales de la tabla 1.

Paso 1. Ordenar los datos de menor a mayor

3310 3355 3450 3480 3480 3490 3520 3540 3550 3650 3730 3925

Paso 2.

$$i = \left(\frac{p}{100}\right)n = \left(\frac{85}{100}\right)12 = 10.2$$

Paso 3. Como i no es un número entero, se debe redondear. La posición del percentil 85 es el primer entero mayor que 10.2, es la posición 11.

Observe ahora los datos, entonces el percentil 85 es el dato en la posición 11, o sea 3730.

Para ampliar la formación en el uso de este procedimiento, calculará el percentil 50 en los sueldos mensuales iniciales. Al aplicar el paso 2 obtiene.

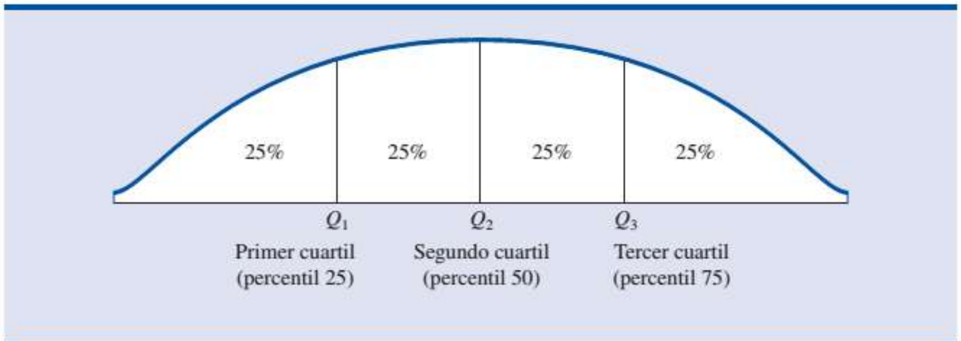
$$i = \left(\frac{50}{100}\right)12 = 6$$

Como i es un número entero, de acuerdo con el paso 3 b) el percentil 50 es el promedio de los valores de los datos que se encuentran en las posiciones seis y siete; de manera que el percentil 50 es $(3490 + 3520)/2 = 3505$. Observe que el percentil 50 coincide con la mediana.

CUARTILES

Con frecuencia es conveniente dividir los datos en cuatro partes; así, cada parte contiene una cuarta parte o 25% de las observaciones. En la figura 1 se muestra una distribución de datos dividida en cuatro partes. A los puntos de división se les conoce como **cuartiles** y están definidos como sigue:

Figura 1. LOCALIZACIÓN DE LOS CUARTILES



Q_1 = primer cuartil, o percentil 25
Q_2 = segundo cuartil, o percentil 50
Q_3 = tercer cuartil, o percentil 75

Una vez más se ordenan los sueldos iniciales de menor a mayor. Q_2, el segundo cuartil (la mediana), ya se tiene identificado, es 3505.

3310 3355 3450 3480 3480 3490 3520 3540 3550 3650 3730 3925

Para calcular los cuartiles Q_1 y Q_3 use la regla para hallar el percentil 25 y el percentil 75. A continuación se presentan estos cálculos.

Para hallar Q_1:

$$i = \left(\frac{p}{100}\right)n = \left(\frac{25}{100}\right)12 = 3$$

Como i es un entero, el paso 3 b) indica que el primer cuartil, o el percentil 25, es el promedio del tercer y cuarto valores de los datos; esto es: $Q_1 = (3450 + 3480)/2 = 3465$.

Para Hallar Q_3:

$$i = \left(\frac{p}{100}\right)n = \left(\frac{75}{100}\right)12 = 9$$

Como i es un entero, el paso 3 b) indica que el tercer cuartil, o el percentil 75, es el promedio del noveno y décimo valores de los datos; esto es: $Q_3 = (3550 + 3650)/2 = 3600$.

Los cuartiles dividen los datos de los sueldos iniciales en cuatro partes y cada parte contiene 25% de las observaciones.

3310 3355 3450 | 3480 3480 3490 | 3520 3540 3550 | 3650 3730 3925

$Q_1 = 3465$ $\quad$ $Q_2 = 3505$ (Mediana) $\quad$ $Q_3 = 3600$

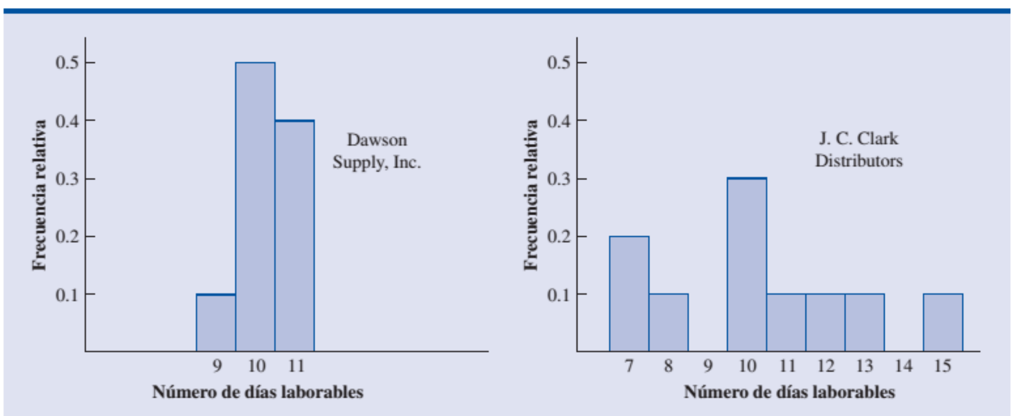
EJERCICIOS

1. Los valores de los datos en una muestra son 10, 20, 12, 17 y 16. Calcule la media y la mediana.
2. Los datos en una muestra son 10, 20, 21, 17, 16 y 25. Calcule la media y la mediana.
3. Los valores en una muestra son 27, 25, 20, 15, 30, 34, 28 y 25. Calcule los percentiles 20, 25, 65 y 75.
4. Una muestra tiene los valores 53, 55, 70, 58, 64, 57, 53, 69, 57, 68 y 53. Calcule la media, la mediana y la moda. Calcule los percentiles 20, 65 y los cuartiles 1, 2, y 3.

MEDIDAS DE VARIABILIDAD

Además de las medidas de localización, suele ser útil considerar las medidas de variabilidad o de dispersión. Suponga que usted es el encargado de compras de una empresa grande y que con regularidad envía órdenes de compra a dos proveedores. Después de algunos meses de operación, se percata de que el número promedio de días que ambos proveedores requieren para surtir una orden es 10 días. En la figura 2 se presentan los histogramas que muestran el número de días que cada uno de los proveedores necesita para surtir una orden. Aunque en ambos casos este número promedio de días es 10 días, ¿muestran los dos proveedores el mismo grado de confiabilidad en términos de tiempos para surtir los productos? Observe la dispersión, o variabilidad, de estos tiempos en ambos histogramas. ¿Qué proveedor preferiría usted?

Figura 2. DATOS HISTÓRICOS QUE MUESTRAN EL NÚMERO DE DÍAS REQUERIDOS PARA COMPLETAR UNA ORDEN



Para la mayoría de las empresas es importante recibir a tiempo los materiales que necesitan para sus procesos. En el caso de J. C. Clark Distributor's sus tiempos de entrega, de siete u ocho días, parecen muy aceptables; sin embargo, sus pocos tiempos de entrega de 13 a 15 días resultan desastrosos en términos de mantener ocupada a la fuerza de trabajo y de cumplir con el plan de producción. Este ejemplo ilustra una situación en que la variabilidad en los tiempos de entrega puede ser la consideración más importante en la elección de un proveedor. Para la mayor parte de los encargados de compras, la poca variabilidad que muestra en los tiempos de entrega de Dawson Supply, Inc. hará de esta empresa el proveedor preferido.

Ahora mostramos el estudio de algunas de las medidas de variabilidad más usadas.

RANGO

La medida de variabilidad más sencilla es el rango.

RANGO

$$\text{Rango} = \text{Valor mayor} - \text{Valor menor}$$

De regreso a los datos de la tabla 1 sobre sueldos iniciales de los recién egresados de la carrera de administración, el mayor sueldo inicial es 3925 y el menor 3310. El rango es $3925 - 3310 = 615$.

VARIANZA

La varianza es una medida de variabilidad que utiliza todos los datos. La varianza está basada en la diferencia entre el valor de cada observación (x_i) y la media. A la diferencia entre cada valor x_i y la media ($\bar{x}$ cuando se trata de una muestra, μ cuando se trata de una población) se le llama desviación respecto de la media. Si se trata de una muestra, una desviación respecto de la media se escribe $(x_i - \bar{x})$, y si se trata de una población se escribe $(x_i - \bar{x})$ Para calcular la varianza, estas desviaciones respecto de la media se elevan al cuadrado.

Si los datos son de una población, el promedio de estas desviaciones elevadas al cuadrado es la varianza poblacional. La varianza poblacional se denota con la letra griega σ^2. En una población en la que hay N observaciones y la media poblacional es μ, la varianza poblacional se define como sigue.

VARIANZA POBLACIONAL

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{N}$$

En la mayor parte de las aplicaciones de la estadística, los datos a analizar provienen de una muestra. Cuando se calcula la varianza muestral, lo que interesa es estimar la varianza poblacional σ^2 . Es posible demostrar que si la suma de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media se divide entre $n - 1$, en lugar de entre n, la varianza muestral que se obtiene constituye un estimador no sesgado de la varianza poblacional. Por esta razón, la varianza muestral, que se denota por s^2, se define como sigue.

VARIANZA MUESTRAL

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Para ilustrar el cálculo de la varianza muestral, se emplean los datos de los tamaños de cinco grupos de una universidad, presentados en la sección anterior. En la tabla 2 aparece un resumen de los datos con el cálculo de las desviaciones respecto de la media y de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media:

Tabla 2. CÁLCULO DE LAS DESVIACIONES Y DE LOS CUADRADOS DE LAS DESVIACIONES RESPECTO DE LA MEDIA EMPLEANDO LOS DATOS DE LOS TAMAÑOS DE CINCO GRUPOS DE ESTADOUNIDENSES

Número de estudiantes en un grupo (x_i)	Número promedio de alumnos en un grupo $(\bar{x})$	Desviación respecto a la media $(x_i - \bar{x})$	Cuadrado de la desviación respecto de la media $(x_i - \bar{x})^2$
46	44	2	4
54	44	10	100
42	44	−2	4
46	44	2	4
32	44	−12	144
		0	256
		$\Sigma(x_i - \bar{x})$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2$

La suma de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media es $\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 256$. Por tanto, siendo $n - 1 = 4$, la varianza muestral es

$$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{256}{4} = 64$$

Antes de continuar, hay que hacer notar que las unidades correspondientes a la varianza muestral suelen causar confusión. Como los valores que se suman para calcular la varianza, $(x_i - \bar{x})^2$, están elevados al cuadrado, las unidades correspondientes a la varianza muestral también están elevadas al cuadrado. Por ejemplo, la varianza muestral en los datos de la cantidad de alumnos en los grupos es $s^2 = 64$ $(estudiantes)^2$. Las unidades al cuadrado de la varianza dificultan la comprensión e interpretación intuitiva de los valores numéricos de la varianza. Aquí lo recomendable es entender la varianza como una medida útil para comparar la variabilidad de dos o más variables. Al comparar variables, la que tiene la varianza mayor, muestra más variabilidad. Otra interpretación del valor de la varianza suele ser innecesaria.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

La desviación estándar se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza. Continuando con la notación adoptada para la varianza muestral y para la varianza poblacional, se emplea s para denotar la desviación estándar muestral y σpara denotar la desviación estándar poblacional. La desviación estándar se obtiene de la varianza como sigue.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

$$\text{Desviación estándar muestral} = s = \sqrt{s^2}$$

$$\text{Desviación estándar poblacional} = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Recuerde que la varianza muestral para los tamaños de cinco grupos de una universidad es $s^2 = 64$. Por tanto, la desviación estándar muestral es $s = \sqrt{64} = 8$.

¿Qué se gana con convertir la varianza en la correspondiente desviación estándar? Recuerde que en la varianza las unidades están elevadas al cuadrado. Por ejemplo, la varianza muestral de los datos de los sueldos iniciales de los egresados de administración es $s^2 = 27{,}440.91\ (dólares)^2$. Como la desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza, las unidades de la varianza, dólares al cuadrado, se convierten en dólares en la desviación estándar. Por tanto, la desviación estándar de los sueldos iniciales es $\$165.65$. En otras palabras, la desviación estándar se mide en las mismas unidades que los datos originales. Por esta razón es más fácil comparar la desviación estándar con la media y con otros estadísticos que se miden en las mismas unidades que los datos originales.

EJERCICIOS

1. Considere una muestra que tiene como valores 10, 20, 12, 17 y 16. Calcule la varianza y la desviación estándar.
2. Considere una muestra con valores 27, 25, 0, 15, 30, 34, 28 y 25. Calcule el rango, la varianza y la desviación estándar.

ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Desarrollar los siguientes ejercicios aplicando lo explicado en la guía.

1. En una prueba sobre consumo de gasolina se examinaron a 13 automóviles en un recorrido de 100 millas, tanto en ciudad como en carretera. Se obtuvieron los datos siguientes de rendimiento en millas por galón.

Ciudad:	16.2	16.7	15.9	14.4	13.2	15.3	16.8	16.0	16.1	15.3	15.2	15.3	16.2
Carretera:	19.4	20.6	18.3	18.6	19.2	17.4	17.2	18.6	19.0	21.1	19.4	18.5	18.7

Use la media, la mediana y la moda para indicar cuál es la diferencia en el consumo entre ciudad y carretera.

2. En una investigación hecha por la Asociación Estadounidense de Hospitales se encontró que la mayor parte de las salas de emergencias de los hospitales estaban operando a toda su capacidad (Associated Press, 9 de abril de 2002). En esta investigación se reunieron datos de los tiempos de espera en las

salas de emergencias de hospitales donde éstas operaban a toda su capacidad y de hospitales en que operan de manera equilibrada y rara vez manejan toda su capacidad.

Tiempos de espera para las SE en hospitales a toda capacidad		Tiempos de espera para las SE en hospitales en equilibrio	
87	59	60	39
80	110	54	32
47	83	18	56
73	79	29	26
50	50	45	37
93	66	34	38
72	115		

a. Calcule la media y la mediana de estos tiempos de espera en los hospitales a toda capacidad.
b. Calcule la media y la mediana de estos tiempos de espera en los hospitales en equilibrio.
c. Con base en estos resultados, ¿qué observa acerca de los tiempos de espera para las salas de emergencia? ¿Preocuparán a la Asociación Estadounidense de Hospitales los resultados estadísticos encontrados aquí?

3. ¿Cómo están los costos de abarrotes en el país? A partir de una canasta alimenticia de 10 artículos entre los que se encuentran carne, leche, pan, huevos, café, papas, cereal y jugo de naranja, la revista Where to Retire calculó el costo de la canasta alimenticia en seis ciudades y en seis zonas con personas jubiladas en todo el país (Where to Retire noviembre/diciembre de 2003). Los datos encontrados, al dólar más cercano, se presentan a continuación.

Ciudad	Costo	Zona de jubilados	Costo
Buffalo, NY	$33	Biloxi-Gulfport, MS	$29
Des Moines, IA	27	Asheville, NC	32
Hartford, CT	32	Flagstaff, AZ	32
Los Angeles, CA	38	Hilton Head, SC	34
Miami, FL	36	Fort Myers, FL	34
Pittsburgh, PA	32	Santa Fe, NM	31

a. Calcule la media, varianza y desviación estándar de las ciudades y de las zonas de jubilados.
b. ¿Qué observaciones puede hacer con base en estas dos muestras?

4. Las puntuaciones de un jugador de golf en el 2005 y 2006 son las siguientes:

2005	74	78	79	77	75	73	75	77
2006	71	70	75	77	85	80	71	79

a. Use la media y la desviación estándar para evaluar a este jugador de golf en estos dos años.
b. ¿Cuál es la principal diferencia en su desempeño en estos dos años? ¿Se puede ver algún progreso en sus puntuaciones del 2006?, ¿cuál?

SALIDA. Evaluación, refuerzo o planes de mejoramiento.

HETEROEVALUACIÓN: Cada una de las actividades realizadas tendrá su respectiva calificación. Se tendrá en cuenta, la participación y la calidad de los trabajos.

AUTOEVALUACIÓN: Marca con una X la valoración que crees merecer.

CRITERIO	1	2	3	4	5
Dedico el tiempo suficiente para la preparación de las actividades y evaluaciones					
Contribuyo con mi buen comportamiento en el desarrollo de las clases.					
Busco asesoría de compañeros o docente cuando me surgen duras en el proceso de aprendizaje.					
Asumo con responsabilidad el desarrollo de las actividades de clase cuando trabajo en forma individual o en grupo.					
Llevo mis apuntes en el cuaderno de forma clara y ordenada.					
Asisto puntualmente a clase de acuerdo con los horarios establecidos.					
Presento oportunamente mis trabajos y tareas acuerdo con las fechas establecidas.					
Participo activamente en clase contribuyendo al buen desarrollo de la misma.					
Presento los materiales necesarios para el desarrollo de la clase haciendo buen uso de los mismos.					
Aprovecho los espacios de refuerzo y recuperación, para mejorar mis desempeños.					

COEVALUACIÓN: Cada estudiante socializa en plenaria las valoraciones de la auto-evaluación. Los compañeros participan con mucho respeto para manifestar si esas valoraciones corresponden o no a la realidad y hacer los ajustes del caso.